

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DE MINAS GERAIS - CAMPUS BAMBUÍ  
PÓS-GRADUAÇÃO *LATO SENSU* EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Samuel Leandro Fonseca Amaral

**O ENSINO DOS FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: Museu de Fractais no  
Ambiente Virtual de Aprendizagem.**

BambuÍ

2023

SAMUEL LEANDRO FONSECA AMARAL

**O ENSINO DOS FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: Museu de Fractais no Ambiente Virtual de Aprendizagem.**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Pós-Graduação *Lato Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Minas Gerais - *Campus* Bambuí.

Orientadora: Letícia Alves da Silva.

Bambuí

2023

---

A485e Amaral, Samuel Leandro Fonseca.

O ensino dos fractais na educação básica : museu de fractais no ambiente virtual de aprendizagem [manuscrito] / A Samuel Leandro Fonseca Amaral. – 2023.

41 f. : il.

Orientador: Letícia Alves da Silva.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Minas Gerais. *Campus Bambuí*, 2023.

1. Geometria fractal. 2. Educação básica. 3. Museu virtual.  
I. Silva, Letícia Alves da. II. Instituto Federal de Minas Gerais.  
*Campus Bambuí*. II. Título.

CDD 510.07

---

Catálogo: João Batista Rodrigues – CRB6/2023

Samuel Leandro Fonseca Amaral

**O ENSINO DOS FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: Museu de Fractais no Ambiente Virtual de Aprendizagem.**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Pós-Graduação *Lato Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Minas Gerais - *Campus* Bambuí.

Aprovado em: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_\_\_ pela banca examinadora:

---

Profª Dra. Letícia Alves da Silva - IFMG (Orientadora)

---

Prof. Dr. Marcos Alves de Farias - IFMG

---

Profª Dra. Rosemary Pereira Costa - IFMG

## RESUMO

Desde a sua criação pelo matemático Benoit Mandelbrot na década de 1970, a Geometria Fractal tem sido bastante aplicada em muitas áreas do conhecimento, como na medicina, na meteorologia, na geografia, na informática e nas artes. Ainda assim, trata-se de um tema desconhecido por muitas pessoas e pouco explorado na Educação Básica. Este trabalho tem por objetivo apresentar os principais conceitos, propriedades e exemplos de fractais, bem como uma proposta para se trabalhar o assunto no Ensino Médio, através de uma sequência didática. A proposta envolve a criação e utilização de um museu virtual no AVA Moodle, para a exposição de fractais em galerias diversas. Os passos para a construção do museu e dos fractais, utilizando sites e aplicativos computacionais, também são descritos em detalhes.

**Palavras chaves:** Geometria Fractal. Educação Básica. Museu Virtual.

## **ABSTRACT**

Although fractal geometry has been applied to many different disciplines in modern science, such as medicine, arts, meteorology, geography or computer sciences, since its foundation in the 1970s by the mathematician Benoit Mandelbrot, many people are still not familiar with this area; especially, in the Basic Education at school this topic is rarely known. For this reason, this work presents the main concept and basic properties of fractals and also gives some examples. Thereby, the main focus of this work lies in the derivation of a virtual museum in AVA Moodle and an instruction how this didactic tool can be used to introduce fractal geometry in high school. How to make a museum, where students can explore different galleries in which fractals are exhibited, is discussed in detail.

**Keywords:** Fractal Geometry. Basic education. Virtual Museum.

## Lista de Ilustrações

Figura 1 - Ilustração do processo recursivo no segmento. ....	12
Figura 2 - Ilustração do processo recursivo no quadrado. ....	12
Figura 3 - Ilustração das iterações iniciais na construção do Conjunto de Cantor. ....	14
Figura 4 - Ilustração das iterações iniciais na construção do Triângulo de Sierpinski. ....	15
Figura 5 - Ilustração das iterações iniciais na construção da Curva de Koch. ....	17
Figura 6 - Ilustração das iterações iniciais na construção da Ilha de Koch. ....	18
Figura 7 - Ilustração das iterações iniciais na construção da Curva de Peano. ....	20
Figura 8 - Ilustração da primeira instrução. ....	25
Figura 9 - Ilustração da segunda instrução. ....	26
Figura 10 - Ilustração da terceira instrução. ....	26
Figura 11 - Marcando pontos no Geogebra. ....	35
Figura 12 - Construindo um segmento de reta no Geogebra. ....	36
Figura 13 - Construção no Geogebra: Iterações do Conjunto de Cantor. ....	36
Figura 14 - Removendo os eixos e a malha no Geogebra. ....	37
Figura 15 - Iterações iniciais da construção do Conjunto de Cantor no Geogebra. ....	37
Figura 16 - Hall de entrada. ....	38
Figura 17 - Conjunto de Cantor e Triângulo de Sierpinski na Exposição Pop Fractais. ....	38
Figura 18 - Imagens da Exposição IFS Fractais. ....	39
Figura 19 - Ilustração de A Escadaria. ....	39

## Sumário

1 INTRODUÇÃO.....	8
2 REVISÃO DE LITERATURA.....	10
2.1 O que são fractais .....	10
2.2 Formalizações matemáticas .....	11
2.3 Dimensão Fractal .....	12
2.4 Alguns fractais bastante conhecidos.....	13
2.4.1 O Conjunto de Cantor .....	13
2.4.2 O Triângulo de Sierpinski .....	15
2.4.3 A Curva de Koch e o Floco de Neve de Koch .....	17
2.4.4 A Curva de Peano.....	19
2.5 Aplicações dos fractais .....	21
3 FRACTAIS E A EDUCAÇÃO BÁSICA.....	23
3.1 Apresentação da sequência Didática.....	24
4 CONSTRUINDO UM MUSEU VIRTUAL DE FRACTAIS PASSO A PASSO .....	33
4.1 A estrutura do museu .....	33
4.2 Tutorial para representar as primeiras iterações da construção do Conjunto de Cantor no Geogebra .....	35
4.3 Tutorial para a construção de fractais utilizando o aplicativo Gerador de Fractal IFS Fractal Generator .....	38
4.4 O museu.....	38
5 CONCLUSÃO .....	40
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	41

## 1 INTRODUÇÃO

Construída há muitos séculos, a Geometria Euclidiana, plana ou espacial, é a geometria baseada nos axiomas de Euclides. Na famosa obra intitulada *Os Elementos*, Euclides reuniu diversos conhecimentos matemáticos de seu tempo, que envolviam geometria, aritmética e álgebra, organizando-os em treze volumes. Tal obra obteve um grande sucesso em virtude da sua forma axiomática e lógica de apresentar a matemática (BECKER, 2004).

A Geometria Euclidiana foi bastante utilizada para descrever objetos e situações, através de formas geométricas como retas, curvas, figuras planas, sólidos e corpos redondos. Entretanto, tal geometria apresenta certas limitações ao se estudar elementos de maior complexidade, como montanhas, folhas e troncos de árvores, as fronteiras entre países, estados e cidades. Para representar formas irregulares da natureza, surgiu, nos últimos anos, uma nova geometria, chamada de Geometria Fractal (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2002-2003).

Conforme Ventura (2019), a Geometria Fractal possui aplicações em várias áreas do conhecimento, como nas Artes, na Cosmologia, na Medicina, na Biologia, na Geografia, na Física, na Astronomia, na Meteorologia, na Computação, na Engenharia, dentre outras áreas, mostrando seu alcance e relevância.

O termo fractal vem do adjetivo latino *fractus*, que significa quebrar. De acordo com os apontamentos da Universidade de Coimbra (2002-2003), o termo fractal foi empregado pelo cientista Mandelbrot, matemático polonês nacionalizado francês, que no início dos anos 80, nomeou os fractais para classificar alguns objetos que não possuíam dimensão inteira e sim fracionária. Segundo Mandelbrot, os fractais são formas igualmente complexas no detalhe e na forma global.

Devido à sua não trivialidade, o estudo dos fractais não é, na maioria das vezes, sequer citado na Educação Básica. Este trabalho apresenta uma proposta para se explorar este tema no segundo ano do Ensino Médio, a fim de desenvolver competências e habilidades importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático, ampliando os conhecimentos de Geometria dos estudantes e surpreendendo-os com resultados contraintuitivos. Vale destacar que, segundo a BNCC (2018), na área de Matemática e suas Tecnologias, para a Etapa do Ensino Médio, dentre as competências específicas estão: compreender e utilizar diferentes registros de representação matemáticos; investigar e estabelecer conjecturas a

respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas. Tais competências podem ser fortemente estimuladas com o estudo do tema proposto.

Após a introdução, na seção 2, foi realizada uma revisão de literatura, com o propósito de apresentar os principais conceitos e propriedades dos fractais. Na seção 3, foi apresentada uma proposta de sequência didática para se trabalhar este tema na Educação Básica. Esta envolverá a criação e utilização de um museu virtual para a exposição de fractais. Na seção 4, foi apresentado um passo a passo para a construção do museu virtual. Por fim, na conclusão, foram apresentadas as considerações finais sobre este trabalho.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 O que são fractais

Os fractais são formas geométricas irregulares ou fragmentadas, que podem ser subdivididas em partes iguais ou muito similar à sua forma total. Um objeto fractal não perde sua definição formal, conforme é ampliado, mantendo sua estrutura semelhante à forma original (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2002-2003).

De acordo com Oliveira (2014), os fractais podem ser classificados em três categorias principais. Estas três categorias podem ser definidas pela forma como os fractais são criados, que são os fractais gerados por sistemas de iterações, gerados por computadores e os fractais aleatórios.

Os fractais gerados por sistemas de iterações, também conhecidos por fractais geométricos, são subconjuntos obtidos por transformações geométricas simples do objeto nele próprio. Na construção de tais fractais, existe uma regra fixa de substituição geométrica, aplicada a cada iteração. São exemplos: o Conjunto de Cantor, o Floco de neve de Koch e o Triângulo de Sierpinski. A respeito dos fractais geométricos, vale destacar que:

Uma vez que os fractais são gerados por algoritmos matemáticos (definidos de forma recursiva), são por definição infinitos, uma vez que podem ser tão detalhados quanto quisermos, bastando para isso aumentar o número de iterações a efectuar. Assim, qualquer que seja o número de ampliações de um determinado objecto fractal, nunca obteremos a “imagem final”, uma vez que ela poderá continuar a ser infinitamente ampliada (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2002-2003, p.14).

Os fractais gerados por computadores são gráficos de funções matemáticas definidoras que costumam operar com números imaginários e números complexos. Um exemplo é o conjunto de Mandelbrot, um dos fractais mais conhecidos.

Os fractais aleatórios, conhecidos por fractais da Natureza, são aqueles que o todo da figura é estatisticamente semelhante a uma ampliação de uma parte. Um exemplo de um fractal aleatório são os relâmpagos, o galho de samambaia, a couve-flor, dentre outros.

As três principais características que definem os fractais são a autossemelhança ou autossimilaridade, a dimensão e a complexidade infinita.

A autossemelhança de um fractal presume que o conjunto total é constituído por pequenas réplicas desse mesmo conjunto. Assim, qualquer que seja a ampliação considerada, serão obtidas sucessivas cópias do objeto inicial.

De acordo com Oliveira (2014), um objeto possui autossemelhança exata se possui réplicas perfeitas, sendo o fractal idêntico em diferentes escalas. Por exemplo, ao dividir uma régua de 100 centímetros em 10 partes de 10 centímetros, cada parte será autossemelhante à régua inicial com o fator de redução de  $1/10$ . Pode-se continuar dividindo indefinidamente cada parte em 10 partes iguais.

A autossemelhança exata não pode ser definida como um conceito concreto, pois na natureza os objetos não são totalmente iguais a si próprios. Contudo, pode-se perceber na natureza, objetos autossemelhantes em que a semelhança se dá até um certo grau, como por exemplo em uma samambaia ou uma couve-flor.

A autossemelhança estatística é caracterizada estatisticamente, onde os elementos de uma certa parte da figura encaixam-se em uma certa modalidade da distribuição estatística, que são preservadas em diferentes escalas. Um exemplo são os fractais aleatórios. Nos casos dos fractais naturais, a autossemelhança é estatística e não matemática.

A autossemelhança aproximada possui réplicas quase perfeitas, onde os fractais parecem, mas não são idênticos em escalas distintas. Um exemplo de autossemelhança aproximada são os fractais que são gerados por computadores.

## **2.2 Formalizações matemáticas**

Conforme recordado por Silva et al (2023), a definição de fractal pode ser entendida em um processo de recursão, onde cada aresta (lado) do objeto é dividida em  $r$  partes geometricamente iguais, obtendo-se o coeficiente de redução  $k$ , onde  $k = 1/r$ . Nesse processo, define-se  $N$  como o número de objetos iguais derivados do processo recursivo de subdivisão. Dessa forma, o processo recursivo acontece ao dividir um objeto em partes iguais e, para cada porção obtida, a divisão em partes iguais se repete sucessivamente.

Para iniciar o estudo matemático do comportamento dos fractais, considere o segmento de reta, representado na Figura 1. O objeto, sem nenhuma iteração,

compõe a iteração 0 do processo recursivo. Na iteração 1, divide-se o segmento em três partes iguais ( $r = 3$ ), obtendo-se três segmentos de reta idênticos:

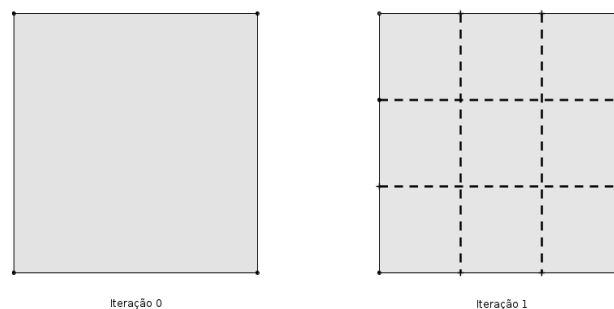
Figura 1 - Ilustração do processo recursivo no segmento.



Fonte: Autor, 2023.

Neste caso, o coeficiente  $k$  de redução é  $1/3$  e o número  $N$  de objetos resultantes é 3. Existe, portanto, uma relação de igualdade para o número  $r$  de divisões realizadas no objeto e o número  $N$  de objetos decorrentes. Isto não ocorre, por exemplo, se o objeto de estudo for um quadrado (Figura 2):

Figura 2 - Ilustração do processo recursivo no quadrado.



Fonte: Autor, 2023.

Quando se divide os segmentos em três partes iguais ( $r=3$ ), obtém-se 9 quadrados idênticos, representados na iteração 1. Assim, o coeficiente  $k$  de redução é  $1/3$  e o número  $N$  de objetos resultantes é 9.

### 2.3 Dimensão Fractal

A dimensão fractal mede o grau de irregularidade e de fragmentação dos fractais.

Diferentemente das dimensões da Geometria Euclidiana e da Álgebra Linear, a dimensão fractal não precisa ser um número natural, pode ser uma fração ou até mesmo um número irracional. Oliveira (2014, p.46) explica que “a dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço e surge então como uma alternativa de medição, obtendo assim o grau de complexidade de uma forma”.

A dimensão  $d$  de um objeto fractal é calculada pela fórmula:

$$d = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{k})},$$

sendo  $N$  o número de objetos iguais derivados do processo recursivo e  $k$  o coeficiente de redução.

Conforme colocado por Janos (2008), linhas retas, quadrados e cubos podem ser pensados como cópias reduzidas de si próprias: uma linha reta pode ser dividida em duas linhas idênticas, um quadrado pode ser visto como 4 quadrados de  $1/2$  de lado idênticos e um cubo como 8 cubos com lados reduzidos à metade.

- Para a linha, tem-se que:

$$d = \frac{\log(2)}{\log(\frac{1}{1/2})} = \frac{\log(2)}{\log(2)} = 1.$$

- Para o quadrado, tem-se que:

$$d = \frac{\log(4)}{\log(\frac{1}{1/2})} = \frac{\log(2^2)}{\log(2)} = \frac{2 \cdot \log(2)}{\log(2)} = 2 \cdot 1 = 2.$$

- Para o cubo, tem-se que:

$$d = \frac{\log(8)}{\log(\frac{1}{1/2})} = \frac{\log(2^3)}{\log(2)} = \frac{3 \cdot \log(2)}{\log(2)} = 3 \cdot 1 = 3.$$

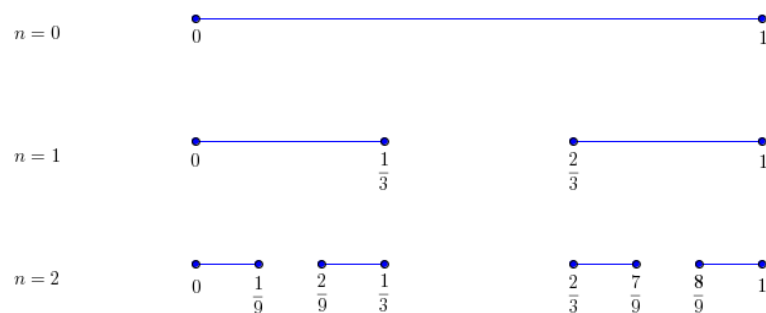
## 2.4 Alguns fractais bastante conhecidos

### 2.4.1 O Conjunto de Cantor

Conforme abordado por Oliveira (2014), o Conjunto de Cantor foi estudado pelo matemático Georg Cantor em 1883. A sua construção parte do intervalo fechado

$[0, 1] \subset \mathbb{R}$  e é feita como se segue: O intervalo  $C_0 = [0,1]$  é dividido em três partes iguais e descarta-se o terço médio, restando assim a união disjunta dos intervalos  $[0, 1/3]$  e  $[2/3, 1]$ ,  $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ , cada intervalo com medida de comprimento igual a  $1/3$ . Depois, cada um dos dois intervalos restantes é dividido novamente em três partes iguais e despreza-se o terço médio de cada um deles, restando assim a união disjunta  $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ . Este processo é repetido sucessivamente e, quando o número de iterações tende ao infinito, obtém-se o Conjunto de Cantor.

Figura 3 - Ilustração das iterações iniciais na construção do Conjunto de Cantor.



Fonte: Autor, 2023.

Não é difícil observar que no 1º passo, remove-se um segmento com  $1/3$  da medida de comprimento do segmento unitário, restando um objeto com  $2/3$  da medida de comprimento do segmento inicial. No 2º passo, remove-se outros dois segmentos de medida de comprimento  $1/9$  cada, restando um objeto com  $1 - 1/3 - 2/9 = 4/9$  da medida de comprimento do segmento inicial. No 3º passo, resta um objeto com  $1 - 1/3 - 2/9 - 4/27 = 8/27$  da medida de comprimento do segmento inicial. Procedendo desta forma, no enésimo passo, restará um objeto com:

$$\begin{aligned}
 1 - \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} \right) &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{2}{3} \right)^i = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\left( \frac{2}{3} \right)^n - 1}{\frac{2}{3} - 1} \\
 &= 1 + \left( \frac{2}{3} \right)^n - 1 = \left( \frac{2}{3} \right)^n
 \end{aligned}$$

da medida de comprimento do segmento inicial. Fazendo o valor de  $n$  tender a infinito, verifica-se que a medida de comprimento do Conjunto de Cantor é zero.

Conforme analisado em Bebiano e Silva (2012), o Conjunto de Cantor é um objeto geometricamente autossemelhante. A cada segmento no qual aplica-se o processo referido (divide-se em três segmentos congruentes e retira-se o terço médio), obtêm-se dois segmentos que serão novamente divididos em três partes iguais, e que o coeficiente de redução é  $1/3$ . Portanto, a dimensão fractal do Conjunto de Cantor é dada por:

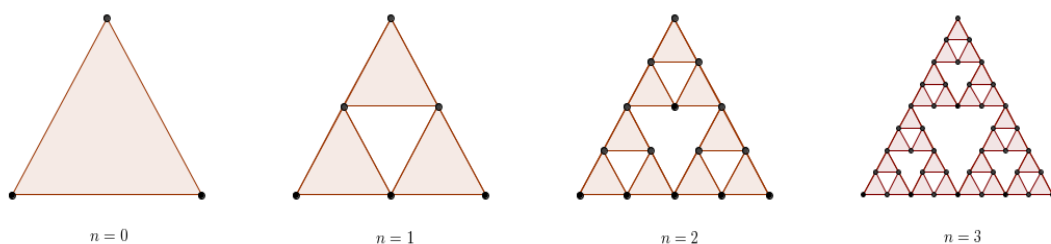
$$d = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63.$$

Portanto, o Conjunto de Cantor é um conjunto com medida de comprimento zero, mas com dimensão fractal não nula.

#### 2.4.2 O Triângulo de Sierpinski

Estudado pelo matemático polonês Walclav Sierpinski no início do século XX, o triângulo de Sierpinski é um fractal bastante interessante. Para a sua construção, em um triângulo equilátero, marca-se o ponto médio de cada lado. Em seguida, estes pontos médios são unidos, gerando quatro triângulos equiláteros. Elimina-se, então, o triângulo central. Repetindo-se a mesma construção em cada um dos triângulos não eliminados, de forma sucessiva, obtém-se, no limite, o Triângulo de Sierpinski.

Figura 4 - Ilustração das iterações iniciais na construção do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Autor, 2023.

Conforme abordado em Bebiano e Silva (2012), na primeira iteração, a área da figura gerada é igual a área do triângulo inicial multiplicada pelo fator  $3/4$  e o seu

perímetro é igual ao perímetro do triângulo inicial multiplicado pelo fator  $3/2$ . Na segunda iteração, a área da nova figura adquirida é igual a área do triângulo inicial multiplicado pelo fator  $(3/4)^2$  e o seu perímetro é igual ao perímetro do triângulo inicial multiplicado pelo fator  $(3/2)^2$ . Na terceira iteração, a área da nova figura gerada é igual a área do triângulo inicial multiplicado pelo fator  $(3/4)^3$  e o seu perímetro é igual ao perímetro do triângulo inicial multiplicado pelo fator  $(3/2)^3$ . Não é difícil perceber que na  $n$ ésima iteração, a figura obtida terá área  $A_n = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$  e perímetro  $P_n = P \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ .

Quadro 1: Informações de iterações da construção do Triângulo de Sierpinski.

Passos	Área	Perímetro
0	A	P
1	$A_1 = A \cdot \frac{3}{4}$	$P_1 = P \cdot \frac{3}{2}$
2	$A_2 = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$	$P_2 = P \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$
3	$A_3 = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$	$P_3 = P \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$
n	$A_n = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$	$P_n = P \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Fonte: Autor, 2023.

Fazendo o valor de  $n$  tender a infinito, verifica-se que a medida de área do Triângulo de Sierpinski é zero, enquanto o valor do perímetro tende a infinito.

Nota-se que, para qualquer um dos passos da construção do triângulo de Sierpinski, o coeficiente de redução é  $r = 1/2$  (da medida de comprimento do segmento de reta do passo anterior) e o número de triângulos triplica ( $N = 3$ ). Assim, a dimensão fractal do triângulo de Sierpinski é dada por:

$$d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,59.$$

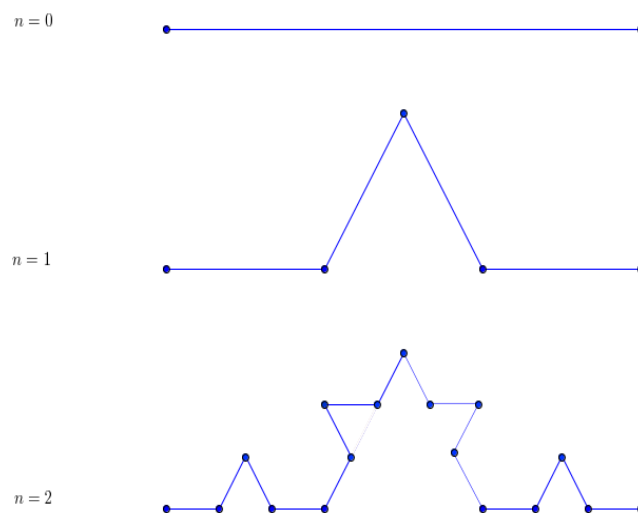
### 2.4.3 A Curva de Koch e o Floco de Neve de Koch

Conforme narrado em Oliveira (2014), a curva de Koch foi desenvolvida pelo matemático sueco Helge Von Koch, em 1904. Este fractal é construído a partir de um segmento de reta e do seguinte processo recursivo:

- Iteração 0: Considera-se um segmento de reta.
- Iteração 1: Divide-se o segmento de reta em três partes iguais e remove-se a parte do meio. Em seguida, sobre a parte central removida, constrói-se um triângulo equilátero e retira-se a sua base.
- Iteração 2: Repete-se o processo descrito na iteração 1 nos 4 segmentos de reta restantes.

E assim sucessivamente.

Figura 5 - Ilustração das iterações iniciais na construção da Curva de Koch.



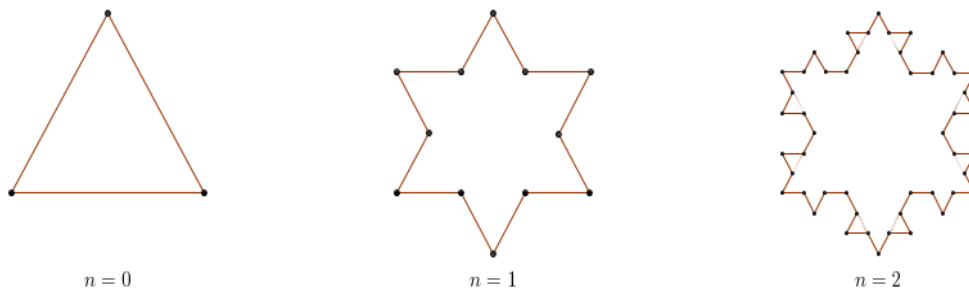
Fonte: Autor, 2023.

A cada iteração, um segmento de reta dá origem a outros 4 segmentos ( $N = 4$ ), com medidas de comprimento 3 vezes menor ( $k = 1/3$ ). Logo, a dimensão fractal da curva de Koch é dada por:

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26.$$

Janos (2008) descreve outra versão da curva de Koch, conhecida como o Floco de neve de Koch ou Ilha de Koch. Nesta versão, o processo recursivo é iniciado com um triângulo equilátero. No primeiro passo da construção, divide-se cada lado do triângulo em três partes iguais e remove-se as partes médias. Então, são construídos, sobre cada um dos segmentos médios removidos, novos triângulos equiláteros, removendo-se também suas bases. Posteriormente, repete-se o mesmo processo a cada um dos 12 segmentos gerados. Aplicando-se sucessivamente o mesmo procedimento a cada um dos lados da figura obtida, no limite, obtém-se o Floco de Neve de Koch.

Figura 6 - Ilustração das iterações iniciais na construção da Ilha de Koch.



Fonte: Autor, 2023.

Ao analisar as iterações acima, percebe-se que são geradas figuras regulares e fechadas, com contornos compostos por lados cada vez menores. Não é difícil notar que os lados de cada nova figura são três vezes menores que os lados da figura anterior.

Quadro 2: Informações de iterações da construção da Ilha de Koch.

Passos	Número de lados	Comprimento do lado
0	3	1
1	$3 \cdot 4 = 12$	$\frac{1}{3}$
2	$3 \cdot 4^2 = 48$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$
3	$3 \cdot 4^3 = 192$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$
N	$3 \cdot 4^n$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Fonte: Autor, 2023.

Na enésima iteração, a figura gerada terá o valor do perímetro igual a:

$$P_n = 3 \cdot 4^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

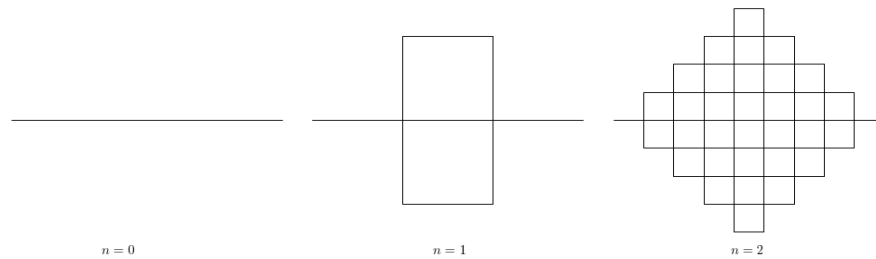
Fazendo n tender a infinito, vê-se que o perímetro da Ilha de Koch tende a infinito.

#### 2.4.4 A Curva de Peano

A Curva de Peano foi apresentada em 1890 por Peano e trata-se de um modelo de fractal que preenche todo o plano. Uma curva que preenche o plano transcorre por todos os pontos de uma determinada área, ocupando de forma gradual toda a totalidade de sua área (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2002-2003).

Para construção da Curva de Peano, parte-se de um segmento de reta. Primeiramente, divide-se este segmento de reta em três segmentos de mesma medida. Em seguida, constrói-se um retângulo sobre o segmento intermediário, que gere dois quadrados de lado igual a cada um dos segmentos. Obtém-se assim uma figura formada por 9 novos segmentos. Nas iterações seguintes, repete-se o procedimento, substituindo-se cada segmento de reta por outros nove segmentos de reta com medida de comprimento 3 vezes menor.

Figura 7 - Ilustração das iterações iniciais na construção da Curva de Peano.



Fonte: Autor, 2023.

Na tabela abaixo, pode-se verificar que no  $n$ -ésimo passo, cada segmento tem medida de comprimento  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$  e a medida de comprimento da curva é igual a  $9^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^n$  (Bebiano e Silva, 2012).

Quadro 3: Informações de iterações da construção da Curva de Peano.

Passos	Número de segmentos	Comprimento de cada sub-segmento	Comprimento da curva
0	1	1	1
1	9	$\frac{1}{3}$	$9 \cdot \frac{1}{3} = 3$
2	$9 \cdot 9 = 9^2$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$9^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3^2$
3	$9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$	$9^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3^3$
4	$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^4$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$	$9^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 3^4$

Fonte: Autor, 2023.

Efetuada de forma sucessiva os passos de construção da Curva de Peano, obtêm-se no limite um quadrado completamente preenchido.

Nota-se que, a cada iteração, um segmento de reta dá origem a outros 9 segmentos ( $N = 9$ ), com medidas de comprimento 3 vezes menor ( $k = 1/3$ ). Logo, a dimensão fractal da curva de Peano é dada por:

$$d = \frac{\log 9}{\log 3} = \frac{\log(3^2)}{\log(3)} = \frac{2 \cdot \log(3)}{\log(3)} = 2.$$

## 2.5 Aplicações dos fractais

Para finalizar esta Revisão de Literatura, serão destacadas algumas aplicações dos fractais.

Os fractais podem ser encontrados no formato de muitos objetos do cotidiano. Exemplos são as nuvens, as montanhas, a couve flor, a samambaia, dentre outros.

A Geometria Fractal tem sido aplicada em muitas áreas do conhecimento. Na Biologia, o conceito de dimensão não obrigatoriamente inteira está sendo utilizado no estudo da rugosidade de alguns microorganismos.

Na medicina, observa-se fenômenos cardíacos e pulmonares com características fractais. Alguns estudos mostram que um coração saudável bate em um ritmo fractal e que um batimento cardíaco quase periódico é um sintoma de insuficiência cardíaca. Algumas formas de terapia para tratamento do câncer estão sendo estudadas e novos processos de diagnóstico estão sendo considerados utilizando a Geometria Fractal (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2002-2003).

Na área da informática, pode-se considerar as características fractais de algumas imagens para tornar possível a sua condensação, codificando em algumas regras simples toda a informação que contém.

Na arte, a Geometria Fractal causou uma revolução no realismo visual, sendo utilizada na construção de imagens extraordinárias e efeitos especiais, para jogos, animações e filmes (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2002-2003).

Este realismo sem precedentes inspira artistas de todas as áreas, introduzindo novos símbolos que acompanham as novas mentalidades. Neste campo, está presente uma forma especial de auto-semelhança, conhecida como Regresso Infinito – uma sequência infinita de versões cada vez mais pequenas da mesma imagem. (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2002-2003, p.51).

Pode-se destacar também o uso da Geometria Fractal na análise de imagens por satélite, pois estas são muito complexas, e a Geometria Fractal consegue detectar certos padrões que não se encaixam em nenhum modelo da Geometria Euclidiana, como o contorno de um bosque ou uma fronteira territorial.

A Geometria Fractal também pode ser utilizada no estudo de diversos fenômenos geológicos, como na cartografia de falhas sísmicas (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2002-2003).

### 3 FRACTAIS E A EDUCAÇÃO BÁSICA

A Matemática ensinada na Educação Básica nem sempre é suficiente para explicar fenômenos da natureza e objetos presentes no cotidiano, fazendo com que parte dos alunos não se identifique com a disciplina e apresente muitas dificuldades. (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2002-2003).

Diante desta situação, é muito importante adotar novas metodologias e também utilizar as tecnologias disponíveis para facilitar e tornar mais prazeroso o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

A aplicação da Geometria Fractal em várias áreas do conhecimento é um elemento motivador para o seu estudo no Ensino Médio, pois além de contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático, pode auxiliar na promoção da interdisciplinaridade.

Ao se estudar fractais, existem várias ideias e conceitos que podem ser abordados durante as atividades. A profundidade e a quantidade do que se é trabalhado podem variar de acordo com a série e a maturidade matemática dos alunos.

Para Oliveira (2014), a abordagem dos fractais em sala de aula, além de proporcionar aulas dinâmicas e envolventes que prendem a atenção dos alunos pela sua beleza, cores e luminosidade, estimula sua dimensão emocional, possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico e sua integração entre conceitos matemáticos e elementos do cotidiano, tais como o uso de processos iterativos, escrever fórmulas gerais, produzir algoritmos e calcular áreas e perímetros de figuras.

De acordo com Zabala (1998, p.18), uma sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”. Inspirado em Oliveira (2014), a fim de explorar conteúdos da Geometria Fractal em sala de aula, o presente trabalho propõe algumas atividades para alunos do 2º ano do Ensino Médio, através de uma sequência didática, organizada em seis aulas de 50 minutos, conforme descrito abaixo:

- Aula 1: Introdução à Geometria Fractal e Tour pelo museu virtual de fractais. Nesta aula, serão apresentados alguns objetos fractais para os alunos, explicando os conceitos introdutórios da Geometria Fractal e aplicações.
- Aula 2: Atividade prática sobre fractais utilizando papel A4, régua e tesoura.
- Aula 3: Explicação sobre os principais conceitos da Geometria Fractal e apresentação do Conjunto de Cantor.
- Aula 4: Apresentação do Triângulo de Sierpinski.
- Aula 5: Apresentação da Curva de Koch e do Floco de Neve de Koch.
- Aula 6: Construção de fractais utilizando o aplicativo Geogebra e também o aplicativo Gerador de Fractal, IFS Fractal Generator. Apresentação do museu virtual atualizado, com a nova galeria para a exposição dos fractais construídos pelos alunos.

A avaliação da sequência didática será realizada durante todas as aulas, através da participação dos alunos e também das tarefas que os alunos realizarão em casa e entregarão ao professor na aula seguinte.

### **3.1 Apresentação da sequência Didática.**

#### **Aula 1: Introdução sobre Geometria Fractal**

Em um primeiro momento, o professor deve realizar uma discussão com os alunos sobre a importância da geometria, sua utilidade e aplicações. Posteriormente, ele dividirá a turma em grupos e apresentará às equipes diversas figuras e objetos do cotidiano. Depois, ele deve solicitar aos alunos para associarem, se possível, as figuras apresentadas com figuras planas e poliedros conhecidos da geometria convencional. Sugestões de figuras a serem apresentadas aos alunos: brócolis, um prédio, nuvens, o sistema nervoso humano, um galho de árvore e uma samambaia.

Após observar as ações dos alunos, o docente realizará intervenções através de perguntas como: Quais foram as figuras recebidas? Qual a relação destas figuras com a matemática? Vocês conseguiram identificar todas as figuras com alguma forma geométrica conhecida? Quais figuras vocês identificaram e quais não conseguiram identificar? Vocês já ouviram falar sobre a Geometria Fractal?

O objetivo desta atividade é levar os alunos a identificarem as diversas formas geométricas existentes em nosso cotidiano e, através da dificuldade de

associar algumas dessas figuras a formas geométricas conhecidas, introduzir ideias da Geometria Fractal.

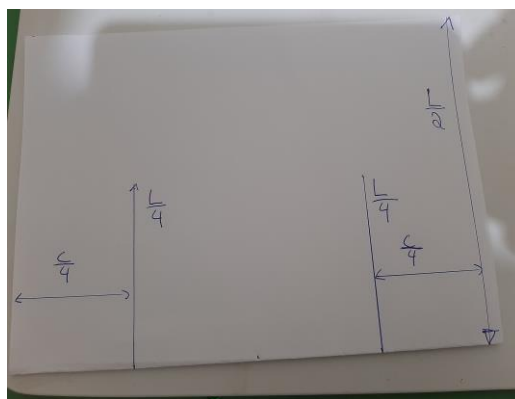
Em seguida, os alunos devem ser convidados para um tour pelo museu virtual de fractais, na sala virtual de aprendizagem. O professor deverá explicar a estrutura do museu, organizado em diversas galerias. Como tarefa de casa, os alunos poderão explorar o museu em detalhes.

## Aula 2: Atividade prática sobre fractais

A proposta é construir um fractal junto aos alunos, conforme o trabalho realizado por Santos *et al* (2021). O professor pode dividir os estudantes em grupos e eles irão precisar de papel A4, uma régua e uma tesoura. A seguir, são descritas as instruções que devem ser passadas aos grupos:

- Pegue uma folha de papel A4 (de altura  $L$  e base  $C$ ) e dobre-a ao meio, unindo a margem inferior a superior. Na nova base obtida, a uma distância  $C/4$  da margem esquerda, faça um corte vertical de tamanho  $L/4$ . Faça o mesmo procedimento em relação à margem lateral direita.

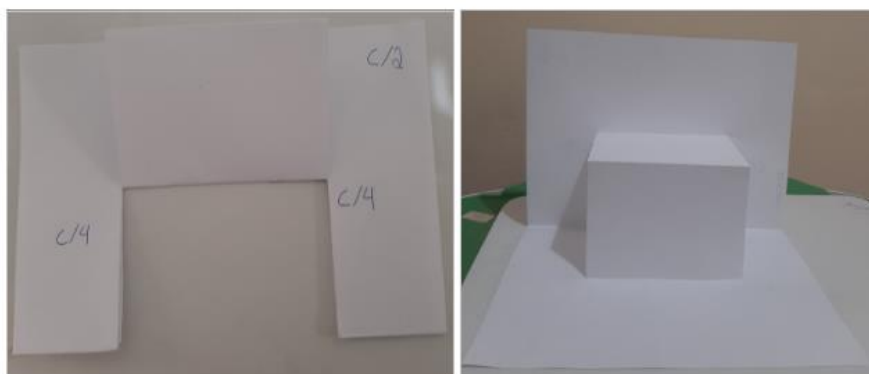
Figura 8 - Ilustração da primeira instrução.



Fonte: Autor, 2023.

- Dobre o retângulo central formado para cima, fazendo um vinco na dobra. Desdobre o papel e vire o vinco para o lado contrário. Este será o objeto gerado na primeira iteração.

Figura 9 - Ilustração da segunda instrução.



Fonte: Autor, 2023.

- Dobre a folha novamente, com a parte cortada para cima e repita o processo da iteração anterior nesta parte dobrada. Em seguida, dobre o novo retângulo para cima, fazendo um vinco na dobra. Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe a imagem em relevo.

Figura 10 - Ilustração da terceira instrução.



Fonte: Autor, 2023.

Para se obter mais iterações, basta repetir este processo, fazendo os cortes e dobradura no papel conforme a regra de corte estabelecida no primeiro passo. Depois deve-se desdobrar todos os recortes e puxar as imagens em relevo.

Após a confecção deste fractal, os alunos deverão explorar as propriedades matemáticas dos objetos gerados a cada iteração e entender o que acontecerá quando o número de iterações for muito grande.

### **Aula 3: Explicação sobre os principais conceitos da Geometria Fractal e apresentação do Conjunto de Cantor.**

Nesta aula, o professor deverá explicar sobre alguns conceitos básicos da Geometria Fractal como origem da nomenclatura e principais características (autossemelhança, dimensão e complexidade infinita).

Ainda nesta aula, o docente deverá introduzir o Conjunto de Cantor, explicando sua origem e processo de construção.

Para a melhor compreensão do processo de construção do Conjunto de Cantor, sugere-se propor aos estudantes a próxima atividade, para a qual serão necessários papel quadriculado, régua e lápis.

A seguir, são listadas as instruções que deverão ser passadas aos discentes:

- Utilizando a régua, fazer um segmento de reta de comprimento  $L$  no papel quadriculado. (Este comprimento  $L$  pode ficar a critério de cada aluno, mas é interessante sugerir, por exemplo,  $L = 9$  cm, para facilitar as marcações).
- Dividir o segmento em três partes iguais e, abaixo, refazer o segmento retirando-se a parte central, gerando então dois segmentos de reta, cada um com medida igual a um terço da medida de comprimento do primeiro segmento.
- Dividir cada um dos dois segmentos em três partes iguais e, abaixo, refazê-los sem a parte central de cada segmento, gerando então quatro segmentos com medida igual a  $1/9$  da medida do primeiro segmento.
- Dividir cada um dos quatro segmentos em três partes iguais e, abaixo, refazê-los, retirando-se a parte a parte central de cada segmento, gerando então oito segmentos com medida igual a  $1/27$  da medida do primeiro segmento.

O docente deverá fazer reflexões e perguntas de forma que os alunos compreendam este processo como recursivo e as propriedades matemáticas envolvidas. Os discentes deverão perceber que o coeficiente de redução é  $1/3$  e calcular a dimensão fractal do Conjunto de Cantor. Também é importante que eles compreendam o que acontece com a medida de comprimento do objeto gerado a cada iteração e o que acontecerá quando o número de iterações for muito grande.

Como tarefa para casa, para a fixação do conteúdo, os alunos deverão visitar a galeria do Conjunto de Cantor no museu virtual. O professor pode propor também que os alunos construam novamente o Conjunto de Cantor seguindo os passos já explicados na aula, mas utilizando canudinhos coloridos, em que para cada iteração, utilizarão um canudo de cor diferente, colando-os um abaixo do outro em uma folha de papel. Os alunos deverão trazer o material construído para que o docente possa fazer fotografias e expô-las no museu virtual em uma galeria própria.

#### **Aula 4: Apresentação do Triângulo de Sierpinski**

Esta aula será destinada ao estudo do Triângulo de Sierpinski, visando entender sua definição, processo de construção e características. A proposta é desenvolver a atividade composta por 2 partes, descrita a seguir:

Parte I - Construção manual do Triângulo Sierpinski: O docente deverá conduzir os alunos através do passo a passo:

- Iteração 0: Em uma folha A4, utilizando régua e compasso, desenhe um triângulo equilátero de lado  $L$  e pinte-o. (Este comprimento  $L$  pode ficar a critério de cada aluno, mas é interessante sugerir, por exemplo,  $L = 8$  cm, para facilitar as marcações).
- Iteração 1: Ao lado do triângulo equilátero, faça uma cópia do mesmo, mas sem pintá-lo. Sobre a cópia, marque o ponto médio de cada um de seus lados e faça segmentos unindo esses pontos médios. Pinte os novos triângulos obtidos, com exceção do triângulo central.
- Iteração 2: Ao lado do objeto gerado na iteração 1, faça uma cópia do mesmo, mas sem pintar os triângulos. Para cada triângulo pintado na iteração anterior, marque o ponto médio em cada um de seus lados e construa segmentos unindo esses pontos médios em cada triângulo. Pinte os novos triângulos obtidos, com exceção dos triângulos centrais.

Parte II - Análise das propriedades: O docente deverá promover questionamentos e reflexões sobre o processo recursivo descrito e auxiliar os estudantes no preenchimento da tabela abaixo:

Iteração	0	1	2	3	...	N
Número de triângulos	1	3				
Perímetro do objeto gerado						
Área do objeto gerado						

Os alunos deverão refletir sobre os padrões observados nas iterações e compreender o que acontecerá quando o número de iterações for muito grande. O fato da área tender a zero e o perímetro tender a infinito poderá gerar uma estranheza e/ou surpresa para os estudantes. É importante que o professor abra um espaço para discussão e questionamentos.

Como tarefa para casa, para a fixação do conteúdo, os alunos deverão visitar a galeria do Triângulo Sierpinski no museu virtual. O professor também deverá propor aos alunos que reconstruam o Triângulo de Sierpinski no formato de mosaico, seguindo os passos já explicados na aula, utilizando folha de isopor ou cartolina, régua, lápis ou caneta, pedrinhas coloridas, lantejoulas ou papel colorido. As iterações devem ser construídas lado a lado e, em cada iteração, deve-se colar as pedrinhas coloridas, lantejoulas ou papel colorido nos triângulos obtidos, com exceção dos triângulos centrais. Os alunos deverão trazer o material construído para que o docente possa fazer fotografias e expô-las no museu virtual em uma galeria própria.

### **Aula 5: Apresentação da Curva de Koch e Floco de Neve de Koch**

Nesta aula, serão trabalhados a Curva de Koch e o Floco de Neve de Koch, visando a compreensão de suas propriedades e processos de construção.

A proposta é desenvolver a atividade abaixo com os alunos, para que eles possam construir a Curva de Koch. O docente deverá instruí-los conforme o passo a passo:

### **Curva de Koch**

- Iteração 0: Desenhar um segmento de reta de comprimento  $L$ . (Este comprimento  $L$  pode ficar a critério de cada aluno, mas é interessante sugerir, por exemplo,  $L = 9$  cm, para facilitar as marcações).
- Iteração 1: Dividir o segmento de reta em três partes iguais e, abaixo, refazê-lo, substituindo-se a parte central por um triângulo equilátero assentado sobre o local do segmento removido e eliminando-se também a sua base.
- Iteração 2: Repetir o processo da iteração 1 nos 4 segmentos gerados.

O docente deverá questionar se os alunos entenderam o processo recursivo e pontuar que um processo semelhante pode ser aplicado tendo como objeto inicial um triângulo equilátero, originando o Floco de Neve de Koch. Em seguida, a proposta é entender a sua construção, através do passo a passo descrito na atividade a seguir:

### **Floco de Neve de Koch**

- Iteração 0: Em uma folha A4, a lápis, desenhe um triângulo equilátero de lado  $L$ . (Sugestão  $L = 9$  cm).
- Iteração 1: Ao lado, faça uma cópia do triângulo desenhado na iteração 0, dividindo cada um dos seus lados em três partes iguais. Construa sobre cada um dos segmentos médios obtidos, um novo triângulo equilátero. Em seguida, apague as bases dos novos triângulos desenhados.
- Iteração 2: Repita o processo descrito na iteração 1 para cada um dos 12 segmentos obtidos

Após a construção das iterações, o professor deverá promover reflexões e perguntas, auxiliando os alunos no preenchimento das tabelas abaixo.

Para a Curva de Koch:

Iteração	Número de segmentos	Comprimento do segmento
0		
1		
2		
3		
4		
...		
n		

Para a Ilha de Koch:

Iteração	Número de lados	Comprimento do lado
0		
1		
2		
3		
4		
...		
n		

Os alunos devem entender o que acontece com os objetos a cada iteração e o que acontecerá quando o número de iterações for muito grande.

Como tarefa para casa, os alunos deverão revisitar a galeria de Koch no museu virtual de aprendizagem. O professor pode solicitar aos alunos que realizem o processo de construção da Curva e do Floco de Neve de Koch no formato de mosaico, utilizando cartolina, régua, lápis ou caneta, pedrinhas coloridas ou folhas coloridas. Os alunos deverão trazer o material construído para a próxima aula para que o professor possa fotografar e postar as fotos na galeria própria do museu.

### **Aula 6: Construção de fractais utilizando aplicativos e softwares**

Nesta aula será explicado aos alunos como construir o Conjunto de Cantor utilizando o Geogebra e também como construir uma imagem e animação fractal utilizando o aplicativo Gerador de Fractal IFS Fractal Generator. Como fechamento das atividades, os alunos serão convidados para um novo tour no museu visual, com a inauguração da galeria Mão na Massa, na qual estarão expostos todos os materiais construídos pela turma.

## **4 CONSTRUINDO UM MUSEU VIRTUAL DE FRACTAIS PASSO A PASSO**

As novas tecnologias da informação e comunicação (NTICs) são ferramentas de grande relevância para a Educação, pois podem enriquecer o processo de ensino aprendizagem. De acordo com Velloso (2014, p. 11) citado em Barroso e Antunes (2020), as NTICs são mecanismos que podem ser utilizados para agilizar, horizontalizar e facilitar a captação, a transmissão e a distribuição de informações em rede.

Ambientes virtuais de aprendizagem, redes sociais, diversas plataformas e aplicativos vêm sendo utilizados para o ensino de muitos conteúdos e mostrando que a sala de aula ultrapassa os muros da escola.

Conforme visto na seção 3, a sequência didática proposta envolve a utilização de um museu virtual para a exposição dos fractais. O objetivo desta seção é auxiliar aqueles docentes que gostariam de aplicar a sequência didática, mas podem encontrar dificuldades na construção do museu. Será apresentado um passo a passo e sugestões de como construí-lo e decorá-lo.

### **4.1 A estrutura do museu**

Para a construção do museu virtual de fractais, o primeiro passo é a escolha do ambiente. Caso a escola possua um ambiente virtual de aprendizagem como AVA Moodle, o professor poderá utilizá-lo para a exposição dos fractais. Dentre outras ferramentas estão o ClassDojo, o EdApp, LearnWorlds, LearnCube. O professor pode ainda optar pelo ambiente das redes sociais, como facebook ou instagram, para realizar a exposição. Pelo facebook, o docente pode criar páginas para disponibilizar os conteúdos e materiais. No instagram, o professor pode utilizar o feed para as postagens.

Como o IFMG-Campus Bambuí dispõe do AVA-Moodle, neste trabalho optou-se por este ambiente. Contudo, as ideias aqui apresentadas podem ser facilmente adaptadas para outros ambientes, de acordo com a realidade da escola e/ou preferência dos docentes e alunos.

Após a definição de qual plataforma ou rede social será utilizada, é necessário organizar a estrutura da sala, de acordo com as galerias definidas. A

sugestão a seguir foi planejada para melhor atender a sequência didática proposta na seção 3, mas fica a critério do docente possíveis modificações.

- Hall de Entrada: O bloco Hall de Entrada é destinado às boas-vindas e ao repasse de informações importantes aos visitantes.
- Exposição - Pop Fractais: Neste bloco, serão expostos os fractais mais tradicionais e “populares”, como o Conjunto de Cantor, o Triângulo de Sierpinski, a Curva de Koch e a Ilha de Koch. Além da exposição dos quadros, os visitantes poderão assistir aos vídeos com explicações sobre estes fractais, para entender os processos de construção envolvidos.
- Exposição - IFS Fractais: Neste bloco, serão expostos os fractais gerados através do site gerador de fractais <https://sirxemic.github.io/ifs-animator/> .
- Exposição - Mão na Massa: Neste bloco, o docente poderá expor todos os trabalhos confeccionados pelos alunos durante a realização da sequência didática. Esta galeria deverá ser inaugurada no encerramento das atividades.
- Saída: Espaço destinado ao agradecimento pela visita.

Após a definição e estruturação da sala ou ambiente virtual, o professor deverá construir as exposições.

Para a Exposição Pop Fractais, o docente necessita das imagens do Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski, da Curva e da Ilha de Koch. Na construção destas figuras, o docente pode utilizar o software matemático gratuito Geogebra. A fim de que a sala se assemelhe a um museu, o docente pode utilizar aplicativos para inserir molduras em fotos, como o Canva. Na seção 4.2, será apresentado um tutorial de como realizar a construção do Conjunto de Cantor, que pode ser utilizado na aula 6. Os demais fractais também podem ser construídos no Geogebra, mas a construção envolve conhecimentos de Desenho Geométrico e ferramentas do Geogebra, como “Polígonos Regulares”, “Mediatriz” e círculos (compassos). Para os docentes que não estiverem familiarizados com o software ou sem tempo para realizarem as construções, a utilização das figuras deste trabalho é autorizada.

Para a Exposição IFS Fractais, o docente irá utilizar imagens construídas pelo aplicativo gerador de fractais IFS Fractal Generator, que é uma ferramenta de fácil acesso e entendimento. Ao abrir o link <https://sirxemic.github.io/ifs-animator/> , o

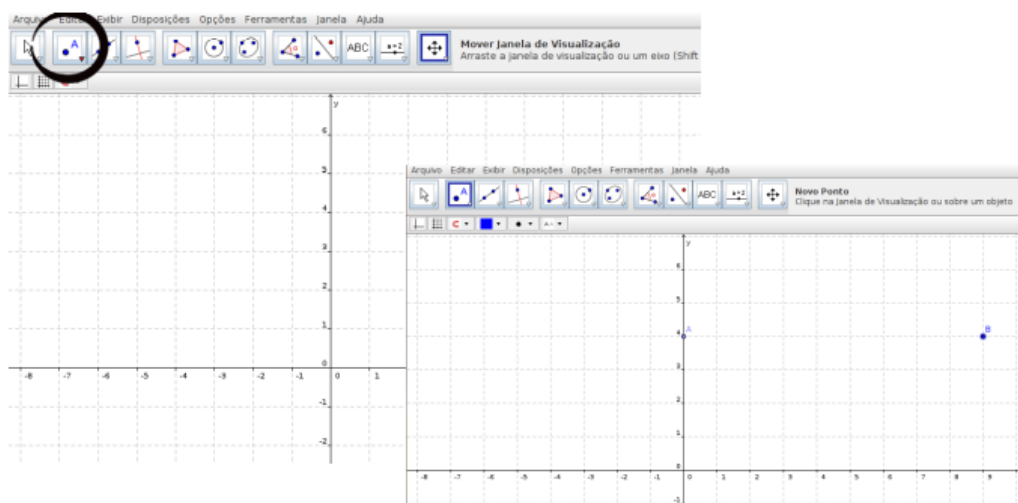
professor irá encontrar os botões nomeados 'Novo', 'Salvar', 'Exportar imagem', 'Animar', 'Adicionar quadro', 'Ajustar à tela', 'Ativar fractais de alta qualidade' e 'Eu tenho epilepsia'. O botão 'Novo' modifica a imagem ou animação fractal atual, enquanto 'Salvar' permite salvar o URL. Ao clicar na opção 'Exportar imagem', o docente poderá salvar a animação ou imagem fractal como um arquivo PNG no computador. Pode-se também adicionar um quadro circular ao redor da imagem ou animação do fractal, clicando na opção 'Adicionar quadro'. Na seção 4.3, será apresentado um tutorial de como utilizar esta ferramenta.

Outros aplicativos e sites podem ser utilizados na construção de fractais. Em “Os 16 melhores geradores de fractais GRATUITOS para 2D e online” (2023), disponível no site Filmora, são listados: Mandelbulb 3D, Gerador de fractal, Xenon Dream, Fractal Now, Ultra Fractal, Amazing Seattle Fractals, Fractal Fr0st, FRAX, Useful, Science vs Magic, ChaosPro, Apophysis, JWildfire, Fractal Landscapes e Fractal Map.

## 4.2 Tutorial para representar as primeiras iterações da construção do Conjunto de Cantor no Geogebra

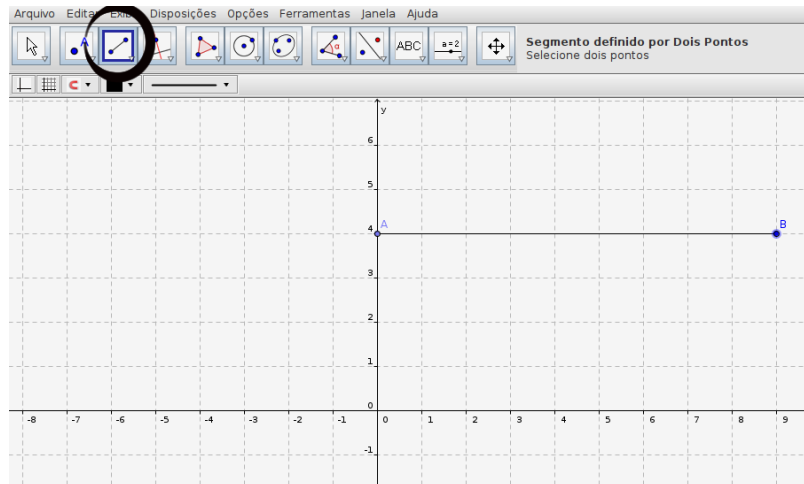
Primeiramente, abra o software Geogebra. Para construir a iteração 0, isto é, um segmento de reta, clique no ícone “Novo Ponto” e marque na janela as extremidades do segmento. Sugestão de coordenadas: A(0, 4) e B(9, 4).

Figura 11 - Marcando pontos no Geogebra.



Em seguida, clique no ícone “Reta definida por dois pontos” e escolha a opção “Segmento definido por dois pontos”. Clique nos pontos A e B.

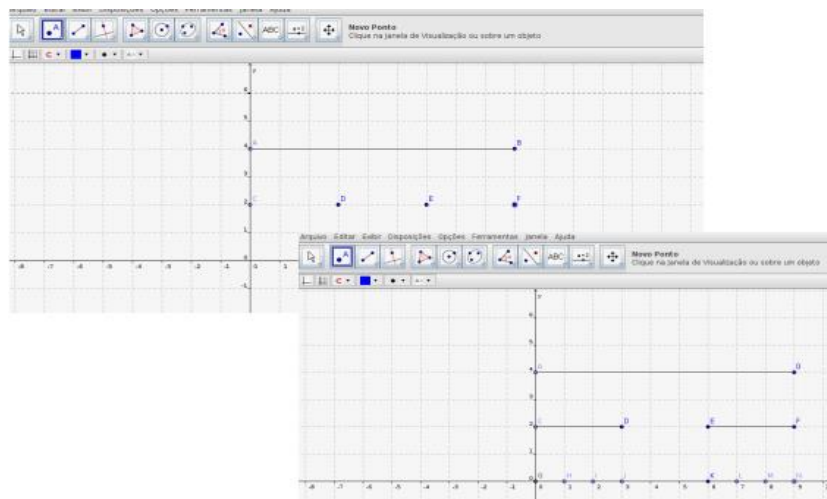
Figura 12 - Construindo um segmento de reta no Geogebra.



Fonte: Autor, 2023.

Para construir a iteração 1, abaixo da iteração 0, é necessário marcar os quatro pontos que serão as extremidades dos dois segmentos gerados: C(0, 2), D(3, 2), E(6, 2) e F(9, 2). Selecione novamente a função “Segmento definido por dois pontos” e clique nos pares C-D e E-F. Analogamente, para construir a iteração 2, abaixo da iteração 1, é necessário marcar os oito pontos que serão as extremidades dos quatro segmentos gerados: G(0, 0), H(1, 0), I(2, 0), J(3, 0), K(6, 0), L(7, 0), M(8, 0) e N(9,0).

Figura 13 - Construção no Geogebra: Iterações do Conjunto de Cantor.



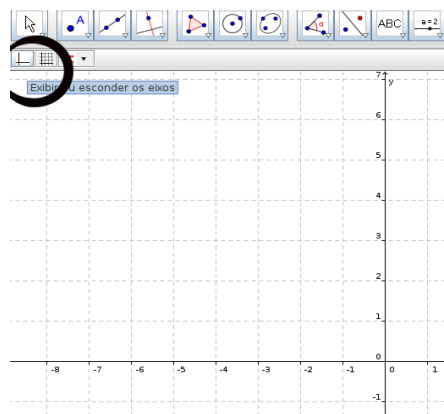
Fonte: Autor, 2023.

Finalmente, escolha a opção “Segmento definido por dois pontos” e clique nos pares G-H, I-J, K-L e M-N.

Foram descritos apenas estes três primeiros passos, de forma que as medidas dos pontos fossem exatas, mas podem ser realizados outros passos.

É possível editar o objeto construído para ocultar as legendas e/ou pontos das extremidades. Para isso, clique com o lado direito do mouse sobre cada ponto e desmarque a opção “exibir rótulo” e/ou “exibir objeto”. Para ocultar os eixos e a malha quadriculada, clique sobre os ícones de eixo e malha.

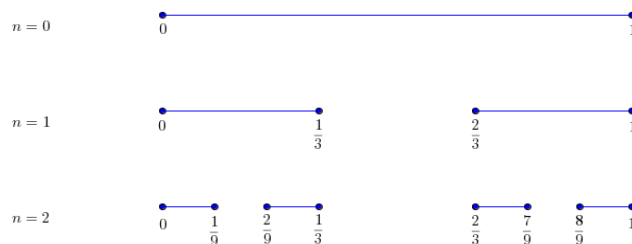
Figura 14 - Removendo os eixos e a malha no Geogebra.



Fonte: Autor, 2023.

Também é possível alterar as cores e a espessura dos objetos, clicando com o lado direito do mouse sobre o objeto e selecionando “Propriedades”. O ícone ABC permite adicionar texto e equações. Após estas edições, tire um print da tela e recorte, conforme desejar, utilizando qualquer editor de imagem.

Figura 15 - Iterações iniciais da construção do Conjunto de Cantor no Geogebra.



Fonte: Autor, 2023.

### 4.3 Tutorial para a construção de fractais utilizando o aplicativo Gerador de Fractal IFS Fractal Generator

Primeiramente, abra o site, clicando no link <https://sirxemic.github.io/ifs-animator/>. Será então exibida uma imagem já gerada. Para copiar esta imagem, deve-se clicar no comando “Exportar imagem”. Clique com o botão direito em “salvar imagem como” para salvar a imagem no computador. É possível animar a imagem, clicando no comando “Animar”. Para gerar novas imagens de fractais, basta clicar no comando “Novo”.

### 4.4 O museu

A seguir, são apresentadas fotos do Museu construído no AVA Moodle - Bambuí:

Figura 16 - Hall de entrada.



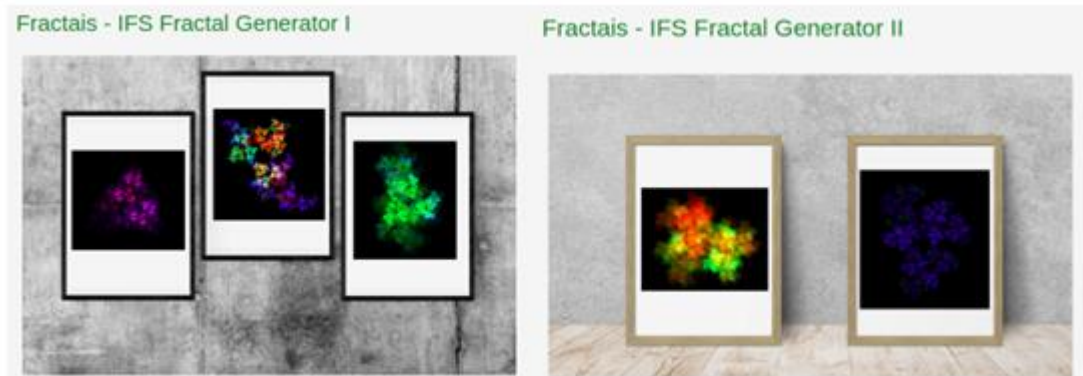
Fonte: Autor, 2023.

Figura 17 - Conjunto de Cantor e Triângulo de Sierpinski na Exposição Pop Fractais.



Fonte: Autor, 2023.

Figura 18 - Imagens da Exposição IFS Fractais.



Fonte: Autor, 2023.

Figura 19 - Ilustração de A Escadaria.



Fonte: Autor, 2023.

## 5 CONCLUSÃO

O ensino da Matemática vem sendo cada vez mais desafiador para os professores. Grande parte dos alunos apresenta dificuldades de concentração e no conteúdo, não se sente motivada e não vê sentido nos assuntos abordados, quando estes não são diretamente aplicados em seu cotidiano.

A Geometria Fractal, por estar presente em várias áreas do conhecimento, pode ser utilizada como forma de motivação para o ensino de Matemática no Ensino Médio, favorecendo a Interdisciplinaridade e contribuindo também para o desenvolvimento do pensamento lógico matemático dos estudantes.

A sequência didática proposta neste trabalho é uma metodologia de ensino que visa uma aprendizagem significativa, colocando os estudantes como protagonistas do processo, conduzidos e auxiliados pelo professor mediador.

A utilização de ferramentas digitais como o Geogebra, sites para geração de fractais e do próprio museu criado no ambiente virtual de aprendizagem, busca despertar o interesse dos alunos, que são nativos digitais.

Finalmente, vale destacar que os profissionais da Educação que tenham interesse em trabalhar o tema aqui estudado são autorizados a reproduzir e adaptar o material apresentado neste TCC. Serão muito bem-vindos feedbacks, relatos de experiências ou sugestões para melhorias.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROSO, Felipe; ANTUNES, Mariana. **Tecnologia na educação: ferramentas digitais facilitadoras da prática docente**. *Pesquisa E Debate Em Educação*, UFJF, Juiz de Fora (2020), 5(1), 124–131. Disponível em <https://periodicos.ufjf.br/index.php/RPDE/article/view/31969>. Acesso em 18/11/2023.

BEBIANO, Natália; SILVA, Letícia Alves da. **Tópicos em Análise**. Universidade de Coimbra. Coimbra, Portugal, maio de 2012.

BECKER, Renata Leandro. **A Álgebra Geométrica de Euclides**. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004. Disponível em: [https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96581/Renata\\_Leandro\\_Becker.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96581/Renata_Leandro_Becker.pdf?sequence=1&isAllowed=y). Acesso em 17/01/2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

JANOS, Michel, **Geometria Fractal**, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2008.

OLIVEIRA, Graciele de Cássia, **Geometria Fractal na Educação Básica**, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, março de 2014. Disponível em: [https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-05/02/2023.9H7HS3/1/monograciele\\_1\\_.pdf](https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-05/02/2023.9H7HS3/1/monograciele_1_.pdf). Acesso em 05/02/2023.

Os 16 melhores geradores de fractais gratuitos para 2D e online ,junho de 2023, disponível em <https://filmora.wondershare.com.br/video-editing-tips/fractal-generators.html> . Acesso em 20/07/2023.

SANTOS, Jacielma Dantas Dos et al.. **A confecção de fractal geométrico e sua aplicação na geometria plana**. VII CONEDU - Conedu em Casa. Campina Grande: Realize Editora, 2021. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/80811>>. Acesso em: 04/08/2023 17:41

SILVA, Letícia Alves da; FARIAS, Marcos Alves de; AMARAL, Samuel Leandro Fonseca. **Você sabe o que são fractais?**. Revista IFMG com Ciência, Bambuí, setembro de 2023. Disponível em <https://ciencia.bambui.ifmg.edu.br/> . Acesso em 02/10/2023.

UNIVERSIDADE DE COIMBRA, Faculdade de Ciências e Tecnologia Departamento de Matemática, Geometria Fractal, **Fundamentos e Ensino da Álgebra**, Coimbra, Portugal, 2002-2003. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2003/GeometriaFractal.pdf>. Acesso em: 05/02/2023.

VENTURA, Dalila. **O que são os fractais, padrões matemáticos infinitos apelidados de 'impressão digital de Deus'**. BBC News Mundo, São Paulo, dezembro de 2019. Disponível em <https://www.bbc.com/portuguese/geral-50656301>. Acesso em: 05/02/2023.

ZABALA, A. A Prática Educativa: Como educar. Porto Alegre, 1998.