

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE MINAS GERAIS - CAMPUS FORMIGA
BACHARELADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Breno Lopes Paim

**QUATÉRNIOS: ESTRUTURA ALGÉBRICA E APLICAÇÃO EM
ANÁLISE DE SINAIS**

Formiga

2025

BRENO LOPES PAIM

**QUATÉRNIOS: ESTRUTURA ALGÉBRICA E APLICAÇÃO EM
ANÁLISE DE SINAIS**

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao Curso Bacharelado em
Engenharia Elétrica do Instituto
Federal de Minas Gerais - Campus
Formiga para obtenção do grau de
bacharel em Engenharia Elétrica.
Orientador: Rafael Vinicius Tayette
da Nóbrega.
Coorientador: Felipe de Sousa Silva.

Formiga

2025

P621.382q Paim, Breno Lopes
Quatérnios: estrutura algébrica e aplicação em análise de sinais. / Breno
Lopes Paim – Formiga : IFMG, 2025.
72 p. :il. color.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Vinícius Tayette da Nobrega
Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Elétrica) –
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais –
Campus Formiga.

1. Quatérnios. 2. Álgebra Quaterniônica. 3. Distorções harmônicas. 4.
Processamento de sinais. 5. Python I. Nobrega, Rafael Vinícius Tayette da.
II. Título.

CDD 621.382

BRENO LOPES PAIM

QUATÉRNIOS: ESTRUTURA ALGÉBRICA E APLICAÇÃO EM ANÁLISE DE SINAIS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso Bacharelado em Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais - Campus Formiga como requisito parcial para obtenção de título de bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Vinicius Tayette da Nobrega

Avaliado em 28 de novembro de 2025.

Nota: 93 pontos.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rafael Vinicius Tayette da Nobrega (Orientador)

Prof. Dr. Rafael Honório Pereira Alves

Prof. Dr. Henrique William Resende Pereira

Formiga, 03 de dezembro de 2025.



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Vinicius Tayette da Nobrega, Professor**, em 04/12/2025, às 19:32, conforme Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.



Documento assinado eletronicamente por **Henrique William Resende Pereira, Professor EBTT**, em 05/12/2025, às 14:40, conforme Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Honório Pereira Alves, Professor**, em 08/12/2025, às 17:56, conforme Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.



A autenticidade do documento pode ser conferida no site <https://sei.ifmg.edu.br/consultadocs> informando o código verificador **2549581** e o código CRC **05475CB4**.

23211.002004/2025-17	2506484v1
----------------------	-----------

Dedico esta monografia aos meus pais,
Claiton e Rose, pelo incentivo moral e
financeiro. Também dedico a todos
que me moldaram no que sou hoje.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais que me apoiaram integralmente ao longo de minha jornada acadêmica.

Agradeço aos meus amigos e colegas que me auxiliaram tanto nos meus estudos quanto psicologicamente, em especial o meu amor Arielly.

Agradeço ao meu primeiro orientador Alcides Farias Andrade pelas conversas que pareciam ler minha mente, por me inspirar em sempre me aprimorar como pessoa, profissional e sempre questionar tudo.

Agradeço ao meu coorientador Felipe de Sousa Silva por me apoiar, sem falhar sequer uma vez durante minha graduação, me mostrar o seu lado humano e compartilhar suas experiências, além de me ajudar a relacionar a teoria com a aplicação prática.

Agradeço também ao meu segundo orientador Rafael Vinicius Tayette da Nóbrega que mesmo não sendo um tema da sua área de atuação, deu o seu máximo para estudá-lo e me auxiliar. Sem sua maestria em *Python* e escrita científica, eu não conseguira ter executado este trabalho na qualidade esperada.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre a álgebra dos quatérnios e sua aplicação na análise de sinais elétricos, propondo uma implementação computacional da série de Fourier quaterniônica (QFT) como alternativa à Transformada de Fourier clássica (FFT). Os quatérnios foram criados por William Rowan Hamilton em 1843 como uma extensão tridimensional dos números complexos, superando o problema dos ‘tripletos’ e estabelecendo a base para operações em quatro dimensões.

A fundamentação teórica aborda as propriedades algébricas dos quatérnios, incluindo soma, multiplicação, módulo, norma, conjugado e representação polar, além das definições de quatérnio unitário, puro e das funções exponencial e logarítmica quaterniônicas. A partir dessas formulações, desenvolve-se o arcabouço matemático necessário para a compreensão da QFT, destacando-se as diferenças estruturais em relação à transformada complexa, especialmente quanto à não comutatividade multiplicativa e à existência de versões ‘direita’ e ‘esquerda’.

Na aplicação prática, o trabalho analisa distorções harmônicas em sistemas elétricos de potência, que decorrem de cargas não lineares, como inversores, retificadores, fornos elétricos a arco e outros. Essas distorções são tradicionalmente avaliadas pela FFT, mas este trabalho tem como objetivo utilizar a QFT para o tratamento dos sinais trifásicos em relação as componentes harmônicas inteiras, inter-harmônicas e sub-harmônicas.

A metodologia consistiu em implementar computacionalmente a QFT utilizando a linguagem Python, com base nos princípios matemáticos desenvolvidos ao longo do trabalho, e em comparar seus resultados com os da FFT tradicional. Essa implementação buscou verificar a precisão numérica, a eficiência e o potencial interpretativo da QFT no contexto de análise de sinais elétricos.

Conclui-se que a QFT oferece uma alternativa promissora à transformada clássica, possibilitando análises mais completas e representações mais detalhadas de sinais tridimensionais, ainda que à custa de maior complexidade matemática e computacional.

Palavras-chave: Quatérnios. Álgebra Quaterniônica. Distorções Harmônicas. Processamento de Sinais.

ABSTRACT

This work presents a study on quaternion algebra and its application to the analysis of electrical signals, proposing a computational implementation of the Quaternion Fourier Transform (QFT) as an alternative to the classical Fast Fourier Transform (FFT). Quaternions were introduced by William Rowan Hamilton in 1843 as a three-dimensional extension of complex numbers, overcoming the limitations of “triplets” and establishing the foundation for operations in four dimensions.

The theoretical framework covers the algebraic properties of quaternions, including addition, multiplication, modulus, norm, conjugation, and polar representation, as well as the definitions of unit and pure quaternions and the quaternionic exponential and logarithmic functions. Based on these formulations, the mathematical structure required to understand the QFT is developed, highlighting the structural differences in relation to the complex transform, especially regarding multiplicative non-commutativity and the existence of left- and right-sided versions.

In the practical application, the study examines harmonic distortions in electric power systems caused by nonlinear loads such as inverters, rectifiers, electric arc furnaces, and others. These distortions are traditionally evaluated using the FFT, but this work aims to employ the QFT for processing three-phase signals with respect to integer harmonics, interharmonics, and subharmonics.

The methodology consisted of implementing the QFT computationally in Python, based on the mathematical principles established throughout the work, and comparing its results with those of the traditional FFT. This implementation sought to assess the numerical accuracy, efficiency, and interpretative potential of the QFT in the context of electrical signal analysis.

The results indicate that the QFT provides a promising alternative to the classical transform, enabling more comprehensive analyses and more detailed representations of three-dimensional signals, although at the cost of increased mathematical and computational complexity.

Keywords: Quaternions. Quaternion Algebra. Harmonic Distortions. Signal Analysis.

Lista de Ilustrações

1 Produto dos Valores Imaginários	7
2 Sinal de Tensão de 60 Hz	27
3 Harmônicos Inteiros	28
4 Inter-harmônicos	28
5 Sub Harmônicos	29
6 Fluxograma do Código	35
7 Configurações Iniciais	36
8 Injeção de Harmônicos e Ruídos	37
9 Implementação dos Quatérnios	38
10 Implementação da DQFT	39
11 Desequilíbrio de Tensão pelo método Prodist	40
12 Desequilíbrio de Tensão pelo método da QFT	41
13 Comparação entre os espectros de frequência obtidos pela FFT e QFT	44
14 Código descrito no Fluxograma.	53

Lista de Tabelas

1	Comparativo entre FFT e QFT	33
2	Comparação entre magnitudes FFT e QFT e a relação entre elas	45

Sumário

1	Introdução	1
1.1	A Complexa História dos Números Complexos	1
1.2	O Problema dos Tripletos e o Nascimento dos Quatérnios	2
1.3	Motivação	3
1.4	Hipóteses	3
1.5	Objetivos	4
1.6	Estrutura do Trabalho	4
2	Fundamentação Teórica	6
2.1	Definições e Notações	6
2.2	Soma de Quatérnios	8
2.3	Multiplicação por Escalar	8
2.4	Multiplicação de Quatérnios	9
2.5	Módulo de um Quatérnio	10
2.6	Norma de um Quatérnio	10
2.7	Conjugado de um Quatérnio	11
2.8	Quatérnio Unitário	12
2.9	Quatérnio Puro	12
2.10	Quatérnio Puro e Unitário	13
2.11	Características Importantes	13
2.12	Exponente, Logaritmo e Representação Polar	14
2.12.1	Expoente Quaterniônico	14
2.12.2	Logaritmo Quaterniônico	16
2.12.3	Representação Polar	16
2.13	Transformada de Fourier Complexa	18
2.13.1	Linearidade	18
2.13.2	Mudança de Escala	19
2.13.3	Deslocamento no Tempo e Frequência	19
2.13.4	Derivação	19
2.14	Transformada de Fourier Quaterniônica	20
2.14.1	Linearidade	21

2.14.2	Mudança de Escala	22
2.14.3	Deslocamento no Tempo e Frequência	23
2.14.4	Derivação	24
2.15	Transformada de Fourier Quaterniônica Discreta	25
2.16	Sinais Elétricos e Distorções Harmônicas	26
3	Metodologia	31
3.1	Desenvolvimento Teórico dos Quatérnios	31
3.2	Análise Comparativa entre QFT e FFT	32
3.3	Programa de Detecção	34
4	Resultados e Discussões	43
5	Considerações Finais	47
5.1	Trabalhos Futuros	48

1 Introdução

1.1 A Complexa História dos Números Complexos

Por muitos séculos, o número $\sqrt{-1}$ surgia em várias ocasiões na Matemática, sendo as aparições mais notáveis, nas soluções dos polinômios de segundo grau e de terceiro grau. Este número intrigava todos os matemáticos que cruzavam seu caminho, pois até então, ele não possuía significado e não pertencia a nenhum conjunto numérico existente.

Luca Pacioli (1445-1517), em 1494 publicou “*Summa de Arithmetica*”. Em sua obra, ele afirmava que as equações de terceiro grau eram impossíveis de serem solucionadas. Somente no início do século XVI, Nicolo Tartaglia (1500-1557) descobriu uma forma de resolver equações cúbicas do tipo reduzidas ($x^3 + cx = d$). Logo depois, Girolamo Cardano (1501-1576) em 1539, com conhecimentos adquiridos pelos matemáticos Tartaglia e Scipione Ferro (1465-1526), encontrou um tipo de solução das equações polinomiais completas de terceiro grau e a publicou em sua obra “*Ars Magna*” em 1545.

Girolamo Cardano, utilizando seu método de solução, em alguns casos, resultava em raízes negativas que o próprio autor considerava como ‘sem solução’ e simplesmente ignorou tais resultados como sendo ‘absurdos’. O engenheiro e arquiteto Rafael Bombelli (1526-1572) após tomar conhecimento da obra de Cardano e se assustar que seu autor simplesmente ignorava tais raízes, aprimorou o método de solução ao publicar seu livro “*L'algebra Parte Maggiore Dell'Aritmetica Divisa in Tre Libri*” em 1572. Sua obra criou um precedente para os complexos, criando um rigor matemático fundamental para futuros desenvolvimentos e de fato concretizando a existência de raízes de números negativos.

O matemático John Wallis (1616-1703), acreditava que os ‘imaginários’ fossem realmente resultados válidos, assim efetuou uma abordagem geométrica para representá-los em um plano, utilizando o método de Descartes¹, porém falhou em representá-los em coordenadas em um plano. Somente com os desenvolvimentos de William Rowan Hamilton (1805-1865) que esta representação pôde ser matematicamente formalizada.

O matemático e filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) tomou interesse na obra de Bombelli e ao estudá-la, Leibniz cunhou o termo moderno ‘imaginário’. Leonhard Euler (1707-1783) também contribuiu para o desenvolvimento dos números complexos e

¹PETERS, 2018, p. 14

cunhou a identidade $i = \sqrt{-1}$.² Posteriormente, Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) também contribuiu para a notação moderna dos números complexos, ao expressar os números complexos como uma soma $a + ib$.³

Finalmente, após séculos de desenvolvimento, os números complexos foram gradativamente mais aceitos na comunidade acadêmica, com suas respectivas provas e teoremas, evoluindo de um 'absurdo' à uma ferramenta extrema importância para o avanço da Matemática e Ciência ao longo de sua história. De acordo com Peters (2018), é notável que o rigor matemático teve uma grande influência do desenvolvimento dos complexos, causando uma evolução positiva de como o rigor é abordado, formalizando então a abordagem moderna de se produzir teoremas, provas e textos matemáticos.

1.2 O Problema dos Tripletos e o Nascimento dos Quatérnios

O matemático irlandês William Rowan Hamilton utilizou uma abordagem geométrica aos números complexos, com a finalidade de criar um método simples para realizar rotações no espaço, criando assim os Tripletos. Eles seriam uma extensão dos números complexos para \mathbb{R}^3 . Porém, após anos se dedicando a desenvolver uma álgebra de tripletos, Hamilton mostrou que os tripletos não fechavam uma álgebra, pois a sua multiplicação não conservava a propriedade distributiva da multiplicação. Essa propriedade é importante de se manter conservada, pois sem ela, os tripletos não representariam de forma correta os efeitos de rotações no espaço tridimensional.

Em 16 de outubro de 1843, quando passeava com sua esposa no Royal Canal na Irlanda, ele obteve uma inspiração: que ao utilizar três termos imaginários e um real, seria possível solucionar o problema dos tripletos. Este momento foi tão icônico que, em euforia, ele cravou na ponte deste canal, as regras de multiplicação dos termos imaginários i, j, k . Infelizmente essa gravação se apagou com o tempo, porém existe uma placa no local com a equação fundamental da multiplicação de quatérnios que ele escreveu. Este local também recebe visitas anuais de matemáticos em respeito a esta grande descoberta.

²PETERS, 2018, p. 12, p. 13

³SJÖDIN, 2024, p. 1

1.3 Motivação

A álgebra de quatérnios, apesar de sua relevância teórica e aplicabilidade em áreas como processamento de sinais, gráficos computacionais, permanece como um formalismo matemático pouco explorado na graduação em Engenharia Elétrica.

A maioria das matrizes curriculares concentra-se em estruturas algébricas mais tradicionais, como números complexos e vetores tridimensionais, relegando os quatérnios a um papel secundário ou ausente. Essa limitação curricular contribui para a escassa familiaridade dos estudantes com os conceitos quaterniônicos, dificultando sua aplicação e popularização.⁴

A lacuna existente no ensino de quatérnios nos currículos de Engenharia Elétrica motivou a realização deste estudo. Assim a primeira proposta é apresentar uma revisão aprofundada de sua álgebra e evidenciar sua aplicabilidade e relevância para esta área.

Outra motivação é dada pela evolução da Informática. A complexidade e volume das operações que um computador deve efetuar encontra-se em um estágio nunca antes alcançado na história da humanidade. Vários sistemas necessitam que o processamento de dados seja o mais preciso possível.⁵ Portanto, existe alguma aplicação que os quatérnios possam suprir esta demanda?

Com esse raciocínio, propõe-se um estudo para implementar a análise de sinais pela transformada de Fourier quaterniônica (QFT) computacionalmente em uma aplicação em Engenharia Elétrica que necessita de precisão e qualidade no processamento de dados.

1.4 Hipóteses

Tendo em vista tanto o rigor matemático quanto as potenciais aplicações computacionais dos quatérnios, este trabalho busca investigar algumas questões fundamentais.

Primeiramente, examina-se de que forma a álgebra de quatérnios pode ser apresentada de maneira didática, de modo a facilitar sua compreensão e inserção no contexto acadêmico.

Em seguida, analisa-se como os quatérnios podem ser aplicados à Transformada de Fourier, explorando as implicações teóricas e práticas dessa generalização.

⁴GONZÁLEZ, 2024 e MCDONALD, 2010

⁵GHASEMAGHAEI, 2019. p 9

Também se discutem as diferenças essenciais entre a Transformada de Fourier Quaternional (QFT) e a Transformada Rápida de Fourier (FFT), destacando suas particularidades conceituais e operacionais.

Por fim, busca-se identificar uma aplicação concreta da QFT na Engenharia Elétrica, evidenciando sua utilidade e relevância para problemas reais da área.

1.5 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é apresentar a álgebra quaterniônica em nível de graduação e aplicar a Transformada de Fourier Quaternional (QFT) de forma computacional em uma aplicação relevante para o contexto da Engenharia Elétrica.

Para alcançar essa finalidade, estabelecem-se alguns objetivos específicos. O primeiro deles consiste em desenvolver matematicamente a álgebra dos quatérnios, de modo a construir uma base conceitual sólida para sua compreensão.

Em seguida, busca-se aplicar os quatérnios na Transformada de Fourier clássica, explorando como essa generalização amplia suas possibilidades teóricas.

Outro objetivo é comparar a Transformada de Fourier Quaternional com a Transformada de Fourier clássica, destacando diferenças estruturais, operacionais e potenciais vantagens de cada abordagem.

Por fim, pretende-se implementar computacionalmente a QFT, demonstrando seu funcionamento e sua utilidade prática em um problema de Engenharia Elétrica.

1.6 Estrutura do Trabalho

Esta monografia foi organizada em cinco capítulos, incluindo a presente introdução.

No Capítulo 2, apresenta-se a fundamentação teórica necessária para a compreensão do trabalho, abordando temas como a álgebra de quatérnios, funções harmônicas e a Transformada de Fourier.

O Capítulo 3 descreve a metodologia adotada, contemplando tanto o estudo bibliográfico quanto a implementação computacional da QFT em Python e sua aplicação no contexto da Engenharia Elétrica.

No Capítulo 4, são apresentados e discutidos os resultados obtidos ao longo do desenvolvimento do trabalho, destacando suas principais contribuições.

Por fim, o Capítulo 5 reúne a conclusão da pesquisa, bem como possíveis direções para trabalhos futuros que possam aprofundar ou expandir as análises aqui realizadas.

2 Fundamentação Teórica

A álgebra quaterniônica é considerada uma generalização da álgebra dos números complexos. Como toda generalização, esta álgebra é sujeita a perdas de propriedades, como a de comutação multiplicativa, por exemplo⁶.

Além disso, pela característica dos quatérnios de terem mais dimensões que os complexos, sendo eles uma real e três imaginárias, é necessário um estudo e desenvolvimento algébrico exclusivo para este grupo.

Assim, esta fundamentação teórica tem como escopo, desde operações e representações quaterniônicas básicas, até a transformada de Fourier quaterniônica e seus ferramentais matemáticos.

2.1 Definições e Notações

Um quatérnio pode ser representado da seguinte forma cartesiana:

$$q = s + xi + yj + zk, \text{ com } s, x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } i, j, k \notin \mathbb{R} \quad (1)$$

com i, j, k possuindo as seguintes propriedades:

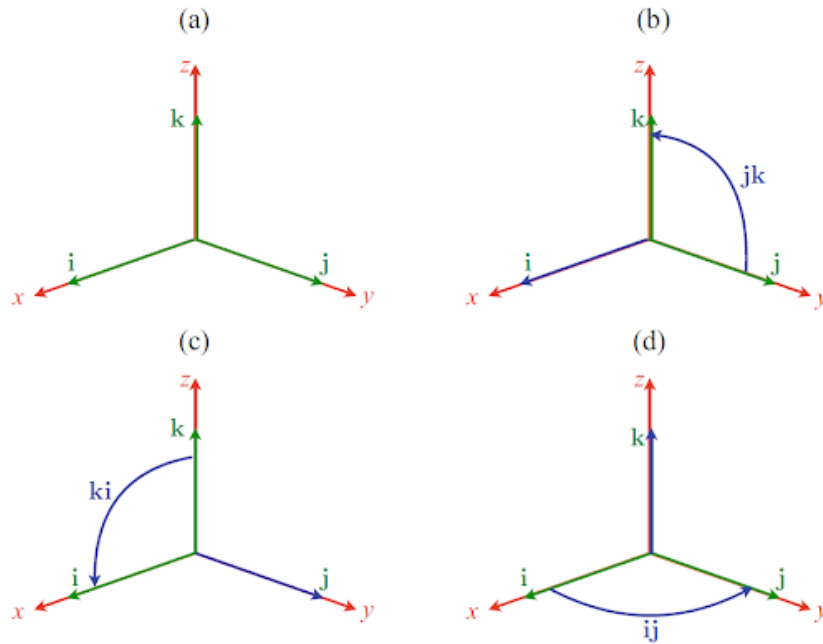
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$ij = k,$	$jk = i,$	$ki = j,$
$ji = -k,$	$kj = -i,$	$ik = -j.$

Estes produtos podem ser interpretados como produtos vetoriais e possuem a interpretação geométrica, conforme ilustrada na Figura 1.

⁶VINCE, 2021, p.99

Figura 1 – Produto dos Valores Imaginários



Fonte: Figura extraída de (VINCE, 2021).

O quatérnio da equação 1 também pode ser escrito da seguinte forma:

$$q = \text{Sc}(q) + \text{Vec}(q). \quad (2)$$

Em que

$$\text{Sc}(q) = s \quad (3)$$

$$\text{Vec}(q) = \vec{q} = xi + yj + zk. \quad (4)$$

Hamilton nomeava $\text{Sc}(q)$ de escalar e $\text{Vec}(q)$ de vetor. Pode-se interpretar estas notações como $\text{Sc}(q)$ sendo a parte real e $\text{Vec}(q)$ como a parte imaginária, como também é visto na notação $\text{Re}(q)$ e $\text{Im}(q)$, fazendo uma alusão aos números complexos:

$$\text{Sc}(q) = \text{Re}(q) \text{ e } \text{Vec}(q) = \text{Im}(q).$$

E assim um quatérnio pode ser representado como um par ordenado que contém sua parte escalar e sua parte vetorial:

$$q = [\text{Sc}(q), \text{Vec}(q)]. \quad (5)$$

Essa notação é a mais compacta e facilita as operações matemáticas. Dessa forma, ela será utilizada com frequência neste trabalho.

2.2 Soma de Quatérnios

Seja a operação de soma dada por

$$\begin{aligned} + : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (p, q) &\mapsto p + q \end{aligned}$$

e seja q dado pela equação 1 e p, w dados como:

$$p = a + bi + cj + dk \quad (6)$$

$$w = l + mi + nj + ok. \quad (7)$$

Então a soma de quatérnios obedece o seguinte procedimento:

$$\begin{aligned} p + q &:= (a + bi + cj + dk) + (s + xi + yj + zk) \\ &:= (a + s) + (b + x)i + (c + y)j + (d + z)k \end{aligned}$$

e deve satisfazer as propriedades de:⁷

2.2.a) $p + q = q + p$ (comutatividade);

2.2.b) $p + (q + w) = (p + q) + w$ (associatividade);

2.2.c) $\exists 0 \in \mathbb{H}; q + 0 = q$ (elemento neutro da soma);

2.2.d) $\forall q \in \mathbb{H}; \exists -q \in \mathbb{H}; q + (-q) = 0$ (elemento inverso da soma).

2.3 Multiplicação por Escalar

Seja a operação de multiplicação por escalar dada por

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\alpha, q) &\mapsto \alpha \cdot q = \alpha q \end{aligned}$$

e seja α e $\beta \in \mathbb{R}$, q e p definidos pelas equações 1 e 6 respectivamente. A multiplicação por escalar obedece o seguinte procedimento:

$$\begin{aligned} \alpha q &:= \alpha(s + xi + yj + zk) \\ &:= \alpha s + \alpha xi + \alpha yj + \alpha zk \end{aligned}$$

e deve satisfazer as propriedades de:⁸

⁷VINCE, 2021 e ELL, 2014

⁸VINCE, 2021 e ELL, 2014

2.3.a) $1q = q1 = q$ (elemento neutro da multiplicação escalar);

2.3.b) $\alpha(\beta q) = (\alpha\beta)q$ (associatividade);

2.3.c) $\alpha(q + p) = \alpha q + \alpha p$ (distributividade em \mathbb{H});

2.3.d) $(\alpha + \beta)q = \alpha q + \beta q$ (distributividade em \mathbb{R}).

2.4 Multiplicação de Quatérnios

Seja a operação de multiplicação de quatérnios dada por:

$$\begin{aligned} * : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (p, q) &\mapsto p * q = pq \end{aligned}$$

e seja $\alpha \in \mathbb{R}$, q , p e w dados pelas equações 1, 6 e 7 respectivamente. A multiplicação de quatérnios obedece o seguinte procedimento:

$$\begin{aligned} p * q &:= (a + bi + cj + dk) * (s + xi + yj + zk) \\ &:= (as + axi + ayj + azk) + (bsi + bxi^2 + byij + bzik) + \\ &\quad + (csj + cxji + cyj^2 + czjk) + (dsk + dxki + dykj + dzk^2) := \\ &:= (as - bx - cy - dz) + (ax + bs + cz - dy)i + \\ &\quad + (ay - bz + cs + dx)j + (az + by - cx + ds)k. \end{aligned}$$

Para simplificar e facilitar o entendimento, é possível escrever este resultado em termos de produto escalar e vetorial conforme mostrado a seguir:⁹

$$p * q = \text{Sc}(p)\text{Sc}(q) - \text{Vec}(p) \cdot \text{Vec}(q) + \text{Sc}(p)\text{Vec}(q) + \text{Sc}(q)\text{Vec}(p) + \text{Vec}(p) \times \text{Vec}(q). \quad (8)$$

Com $\langle \text{Vec}(p), \text{Vec}(q) \rangle$ representando uma operação de produto escalar e $\text{Vec}(p) \times \text{Vec}(q)$ uma operação de produto vetorial.

Essa multiplicação entre quatérnios deve satisfazer as propriedades de:¹⁰

2.4.a) $p * (q + w) = p * q + p * w$ (distributividade pela esquerda);

2.4.b) $(p + q) * w = p * w + q * w$ (distributividade pela direita);

⁹ELL, 2014, p. 27

¹⁰VINCE, 2021 e ELL, 2014

2.4.c) $\alpha(p * q) = (\alpha p) * q = p * (\alpha q)$ (associatividade com \mathbb{R});

2.4.d) $\forall 0 \neq q \in \mathbb{H}, \exists q^{-1} \in \mathbb{H}; q * q^{-1} = q^{-1} * q = 1$ (divisão vetorial);

2.4.e) $p * q \neq q * p$ (não comuta em \mathbb{H}).

2.5 Módulo de um Quatérnio

Seja um módulo de um quatérnio dado por:

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ q &\mapsto |q| \end{aligned}$$

e seja q e p dados pelas equações 1 e 6 respectivamente. Sendo que $\|\cdot\|$ é a norma de um quatérnio e $\bar{\cdot}$ é o conjugado de um quatérnio, o módulo de um quatérnio possui as seguintes características:¹¹

2.5.a) $|q| \geq 0$;

2.5.b) $|q| = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2} = \|q\|^{\frac{1}{2}}$;

2.5.c) $|p * q| = |p| * |q| = |q * p|$;

2.5.d) $|\alpha q| = |\alpha| |q|$;

2.5.e) $|q| = \sqrt{q\bar{q}}$.

A interpretação do módulo de um quatérnio é similar com a interpretação de um módulo de um vetor clássico, sendo que o módulo quaterniônico se refere ao tamanho do quatérnio no espaço quadridimensional Euclidiano.

2.6 Norma de um Quatérnio

Seja a norma de um quatérnio dado por:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ q &\mapsto \|q\| \end{aligned}$$

¹¹VINCE, 2021 e ELL, 2014

e seja q e p dados pelas equações 1 e 6 respectivamente. A norma de um quatérnio possui as seguintes características:¹²

$$2.6.a) \quad ||q|| = s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = |q|^2;$$

$$2.6.b) \quad ||q|| \geq 0;$$

$$2.6.c) \quad ||p * q|| = ||q|| * ||p|| = ||q * p||;$$

$$2.6.d) \quad ||\alpha q|| = ||\alpha|| ||q||;$$

$$2.6.e) \quad ||q|| = q\bar{q}.$$

2.7 Conjugado de um Quatérnio

Seja a operação de conjugação dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ q &\mapsto \bar{q} \end{aligned}$$

e seja q e p dados pelas equações 1 e 6 respectivamente. A conjugação de um quatérnio obedece o seguinte procedimento:

$$\begin{aligned} \bar{q} &:= s - (xi + yj + zk) \\ &:= s - xi - yj - zk \\ &:= \text{Sc}(q) - \text{Vec}(q). \end{aligned}$$

É possível também escrever as partes escalar e vetorial de um quatérnio em função de seu conjugado. Sendo a parte escalar reescrita como:

$$\begin{aligned} q + \bar{q} &= \text{Sc}(q) + \text{Vec}(q) + \text{Sc}(q) - \text{Vec}(q) = 2\text{Sc}(q) \\ \therefore \text{Sc}(q) &= \frac{1}{2}(q + \bar{q}) \end{aligned}$$

e a parte vetorial reescrita como:

$$\begin{aligned} q - \bar{q} &= \text{Sc}(q) + \text{Vec}(q) - \text{Sc}(q) + \text{Vec}(q) = 2\text{Vec}(q) \\ \therefore \text{Vec}(q) &= \frac{1}{2}(q - \bar{q}). \end{aligned}$$

¹²VINCE, 2021 e ELL, 2014

O conjugado também possui as seguintes características:¹³

$$2.7.a) \bar{\bar{q}} = q;$$

$$2.7.b) \overline{\alpha q} = \alpha \bar{q}$$

$$2.7.c) \overline{p + q} = \bar{p} + \bar{q};$$

$$2.7.d) \overline{p * q} = \bar{q} * \bar{p};$$

$$2.7.e) q * \bar{q} = \bar{q} * q = s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = |q|^2;$$

$$2.7.f) q^{-1} = \frac{\bar{q}}{q * \bar{q}} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} = \frac{s - xi - yj - zk}{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

2.8 Quatérnio Unitário

Um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ é unitário quando possui sua norma igual a um e por consequência seu módulo também é igual a 1, como mostrado a seguir:

$$||q|| = |q| = 1. \quad (9)$$

Ele possui as seguintes características:¹⁴

$$2.8.a) q\bar{q} = \bar{q}q = ||q|| = 1;$$

$$2.8.b) q^{-1} = \bar{q}.$$

2.9 Quatérnio Puro

Seja $q \in \mathbb{H}$. Ele será puro, se somente se, sua parte real for nula. Assim, um quatérnio nulo é definido como:

$$\vec{q} = xi + yj + zk = [0, \text{Vec}(q)] \quad (10)$$

Por fim, possui as seguintes características:¹⁵

$$2.9.a) \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = -\frac{1}{2}(pq + qp);$$

$$2.9.b) \vec{p} \times \vec{q} = \frac{1}{2}(pq - qp).$$

¹³VINCE, 2021 e ELL, 2014

¹⁴VINCE, 2021 e ELL, 2014

¹⁵VINCE, 2021 e ELL, 2014

2.10 Quatérnio Puro e Unitário

Este quatérnio reúne ambas as características de um puro e unitário ao mesmo tempo, sendo definido como um quatérnio que possui somente sua parte imaginária não nula e que seu módulo é o elemento neutro da multiplicação. Assim é definido como:

$$\boldsymbol{\mu} \in \text{Vec}(\mathbb{H}) \text{ e } |\boldsymbol{\mu}| = 1.$$

Este quatérnio é uma extensão direta da unidade imaginária dos números complexos, ele representa genericamente a parte imaginária de uma operação.

Ele pode ser simplesmente substituído por uma das coordenadas canônicas (i , j ou k) e ser tratado como um número complexo ou também pode ser substituído por coordenadas não triviais como $\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$, proporcionando várias de possibilidades de operações que podem variar entre 1 a 3 dimensões.

2.11 Características Importantes

Como mostrado no item 2.4.d na Seção 2.4 e no item 2.7.f na Seção 2.7, \mathbb{H} é uma álgebra de divisão, portanto qualquer elemento deste conjunto possui um inverso multiplicativo, que possibilita a divisão vetorial.¹⁶

Como mostrado no item 2.4.e, a multiplicação entre quatérnios no conjunto \mathbb{H} não comuta e por consequência a divisão também não. Assim, para evitar ambiguidade na ordem divisiva, utilizam-se as seguintes notações:

$$pq^{-1} = \frac{p\bar{q}}{\|q\|} \text{ enquanto que } q^{-1}p = \frac{\bar{q}p}{\|q\|}.$$

Portanto a notação do estilo p/q deve ser evitada.

Um quatérnio pode ser representado em uma notação cartesiana muito útil, que é escrita em termos de uma multiplicação do seu módulo $|q|$ com seu quatérnio unitário equivalente \hat{q} :

$$q = |q|\hat{q} = |q| \left(\frac{s}{|q|} + \frac{x}{|q|}i + \frac{y}{|q|}j + \frac{z}{|q|}k \right). \quad (11)$$

O quatérnio normalizado \hat{q} também pode ser chamado de versor e quando q for um quatérnio puro, \hat{q} será um quatérnio unitário puro, que também poderá ser escrito como $\hat{q} = \boldsymbol{\mu}$.¹⁷

¹⁶VINCE, 2021, p. 99

¹⁷ELL, 2014, p. 30

2.12 Exponente, Logaritmo e Representação Polar

Os formalismos matemáticos de exponenciação e logaritmação quaterniônicos precisam de algumas considerações, já que possuem algumas diferenças em relação as operações do conjunto complexo. O estudo de transformada quaterniônica de Fourier (QFT) depende majoritariamente dessas duas ferramentas¹⁸ e portanto elas são apresentadas nas próximas Seções. E, conseqüentemente, a sua representação polar também é discutida e apresentada na sequência.

2.12.1 Expoente Quaterniônico

A constante de Euler e , é um número irracional compreendido entre 2 e 3. O seu exponencial em relação a um número $x \in \mathbb{R}^+$ é:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (12)$$

Portanto, dado um quatérnio puro $\xi \in V(\mathbb{H})$ que pode ser escrito nos termos $\xi = |\xi|\boldsymbol{\xi}$, em que $\boldsymbol{\xi}$ é um quatérnio puro unitário. Ao acoplá-lo na equação anterior, tem-se:

$$e^\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\xi|^n \boldsymbol{\xi}^n}{n!}. \quad (13)$$

Faz-se necessário saber o comportamento deste somatório, quando o expoente é par ($n = 2k$) ou ímpar ($n = 2k + 1$).

$$\boldsymbol{\xi}^n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 2k \\ (-1)^k \boldsymbol{\xi} & \text{se } n = 2k + 1 \end{cases}.$$

Portanto, e^ξ pode ser escrito como:

$$e^\xi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k |\xi|^{2k}}{(2k)!} + \boldsymbol{\xi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k |\xi|^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (14)$$

O primeiro somatório é uma expansão do cosseno escrito em termos de uma série de McLaurin e o segundo somatório é referente a uma expansão do seno escrito utilizando a mesma abordagem, portanto a equação 14 pode ser reescrita como:

$$e^\xi = e^{|\xi|\boldsymbol{\xi}} = \cos |\xi| + \boldsymbol{\xi} \sin |\xi| \quad (15)$$

¹⁸ELL, 2014, p. 31

Esta equação implica que o exponencial de um quatérnio puro, gera um quatérnio não puro, com parte real e vetorial (chamado de quatérnio completo). Esta exponenciação possui três propriedades¹⁹ que devem ser ressaltadas.

1. De que seu módulo será sempre unitário:

$$|e^\xi| = 1, \forall \xi \in V(\mathbb{H}).$$

2. Que o produto de dois exponenciais de quatérnios puro diferentes, não é um exponencial com o argumento que é a soma dos argumentos originais. Isso significa que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ e sendo que ν, μ são quatérnios puro, tem-se:

$$e^{\alpha\nu} e^{\beta\mu} \neq e^{\alpha\nu+\beta\mu}.$$

3. E que existe a reversibilidade, ou seja, o exponencial de um quatérnio puro gera um quatérnio completo e que um quatérnio completo pode ser escrito como uma exponenciação de um quatérnio puro.

Partindo do mesmo princípio, o exponencial de um quatérnio completo $q \in \mathbb{H}$ também é dado pela equação 13. Sabendo que q pode ser escrito como a soma de sua parte real e imaginária $q = \text{Sc}(q) + \text{Vec}(q)$ e aplicando ao expoente, obtém-se:

$$e^q = e^{\text{Sc}(q)+\text{Vec}(q)} = e^{\text{Sc}(q)} e^{\text{Vec}(q)}.$$

Analisando a parcela $e^{\text{Vec}(q)}$ verifica-se que ela é um exponencial de um quatérnio puro que já possui o resultado mostrado na equação 15. Assim aplicando este resultado neste desenvolvimento, determina-se:

$$e^q = e^{\text{Sc}(q)} \left(\cos |\text{Vec}(q)| + \widehat{\text{Vec}(q)} \sin |\text{Vec}(q)| \right). \quad (16)$$

Sendo que $\widehat{\text{Vec}(q)}$ é um quatérnio puro e que representa a normalização da parte vetorial deste quatérnio q .

A equação 16 é a generalização da equação 15, já que se a parte escalar for nula, ou seja, se q for puro, a equação pode ser reduzida para a equação 15.

¹⁹ELL, 2014, p. 32 e 33

2.12.2 Logaritmo Quaterniônico

A definição de logaritmo é a mesma da definição clássica: que é o inverso da exponenciação. Seja p e $q \in \mathbb{H}$ e $p = \ln q$, um logaritmo é:

$$e^p = q. \quad (17)$$

A equação 11 pode ser reescrita em termos de logaritmos, ao aplicar a função \ln , assim resulta:

$$\ln q = \ln(|q|\hat{q}) = \ln |q| + \ln \hat{q}. \quad (18)$$

Note que a propriedade de separação de expoentes é válida, pois a operação está sendo feita entre um expoente real ($|q| \in \mathbb{R}^+$) e um expoente quaterniônico ($\hat{q} \in V(\mathbb{H})$), já que a propriedade 2 da seção 2.12.1 é válida somente em operações entre dois expoentes quaterniônicos.

Pela propriedade 3 da seção 2.12.1, o quatérnio \hat{q} pode ser reescrito como $\hat{q} = e^{|\xi|\xi}$. Trocando a notação para uma notação mais utilizada e menos carregada, tem-se:

$$\hat{q} = e^{\phi_q \mu_q} \text{ tal que } \phi_q = |\xi| \text{ e } \mu_q = \xi. \quad (19)$$

Substituindo a equação 19 na equação 18:

$$\ln q = \ln |q| + \phi_q \mu_q. \quad (20)$$

Da mesma forma que no conjunto \mathbb{C} , o logaritmo em \mathbb{H} é uma função multivalente, portanto é necessário definir um intervalo de atuação para remover ambiguidade nas soluções. Esse intervalo é geralmente uma volta completa no círculo trigonométrico, sendo comumente utilizado os intervalos $] - \pi, \pi]$ ou $]0, 2\pi]$.²⁰

2.12.3 Representação Polar

Além da representação cartesiana, outra representação importante a ser considerada é a polar. Ela realiza uma conexão direta entre a álgebra e a geometria ao utilizar a equação de Euler.²¹

Assim, seja um quatérnio na forma cartesiana $q = s + xi + yj + zk \in \mathbb{H}$, tal quatérnio pode ser expresso na forma polar ao elevar ambos os lados da equação 20 por e :

²⁰CHURCHILL, 1960, p. 55 e ELL, 2014, p. 35 respectivamente.

²¹ELL, 2014, p. 35

$$\begin{aligned}\exp(\ln q) &= \exp(\ln |q| + \phi_q \boldsymbol{\mu}_q) \rightarrow q = \exp(\ln |q|) \exp(\phi_q \boldsymbol{\mu}_q) \\ \therefore q &= |q| e^{\phi_q \boldsymbol{\mu}_q}.\end{aligned}\quad (21)$$

Ao aplicar este resultado na equação de Euler, o quatérnio pode ser escrito em termos de cosseno e seno, ou seja, na forma polar:

$$q = |q| e^{\boldsymbol{\mu}_q \phi_q} = |q| (\cos \phi_q + \boldsymbol{\mu}_q \sin \phi_q). \quad (22)$$

Em que:

$$\begin{cases} |q| = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ \boldsymbol{\mu}_q = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi_q = \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{s} \right) \end{cases}.$$

Este resultado pode ser reduzido para a equação 15 quando o quatérnio for unitário: $|q| = 1$, lembrando que $|\xi| = \phi_q$ e $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu}_q$. Reescrevendo 15 nestes termos:

$$e^{\phi_q \boldsymbol{\mu}_q} = \cos \phi_q + \boldsymbol{\mu}_q \sin \phi_q. \quad (23)$$

Sabe-se também que o inverso de um quatérnio é a negação de sua parte imaginária, assim o inverso da equação 23 é:

$$e^{-\phi_q \boldsymbol{\mu}_q} = \cos \phi_q - \boldsymbol{\mu}_q \sin \phi_q. \quad (24)$$

Com as equações 23 e 24, é possível retirar duas propriedades importantes que são utilizadas pelo QFT²²:

- a) $\cos \phi_q = \frac{1}{2} (e^{\boldsymbol{\mu}_q \phi_q} + e^{-\boldsymbol{\mu}_q \phi_q});$
- b) $\sin \phi_q = -\frac{1}{2} (e^{\boldsymbol{\mu}_q \phi_q} - e^{-\boldsymbol{\mu}_q \phi_q}).$

Por fim, antes de apresentar os conceitos matemáticos da QFT, na próxima Seção, é definida a Transformada de Fourier Complexa e suas propriedades básicas.

²²ELL, 2014, p. 36

2.13 Transformada de Fourier Complexa

Seja uma integral de kernel $K(x, k)$ e função $v(k)$ em que $f \mapsto u$:

$$u(x) = \int_a^b K(x, k)v(k)dk .$$

Assim, a transformada de Fourier é dada como:

$$\left\{ \begin{array}{l} [a, b] \mapsto (-\infty, +\infty) \\ K(x, k) = K(\omega, t) = e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \\ v(k) = f(t) \\ u(x) = F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \end{array} \right. .$$

Portanto, a transformada de Fourier clássica $F(\omega)$ que mapeia uma função $f(t)$, é definida como:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt. \quad (25)$$

A sua função inversa é definida como:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{+i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cos(\omega t) d\omega + i \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \sin(\omega t) d\omega. \quad (26)$$

Sendo que:

- ω é a frequência angular dado por $\omega = \frac{2\pi}{T}$;
- T é o período do sinal.

Com isso, as transformadas operacionais básicas de Fourier são: linearidade, mudança de escala, deslocamento no tempo e frequência e derivação.²³

2.13.1 Linearidade

Dadas as propriedades $f(t) \mapsto F(\omega)$, $g(t) \mapsto G(\omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} \longleftrightarrow \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\} \longleftrightarrow \alpha F(\omega) + \beta G(\omega). \quad (27)$$

Isso garante que as operações são feitas em sistemas lineares e que o princípio da superposição também seja válido, ou seja, garante que os sinais possam ser decompostos em senoides e escalonados.

²³LOTUFO, 2019, p. 25

2.13.2 Mudança de Escala

Dada a operação $f(t) \mapsto F(\omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R} \neq 0$ tem-se:

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t)\} \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \text{ e } \mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha\omega)\} \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{t}{\alpha}\right). \quad (28)$$

1. No domínio do tempo: Se $\alpha > 1$ a frequência será comprimida e se $\alpha < 1$ a frequência será alongada;
2. No domínio da frequência: Se $\alpha > 1$ o tempo será comprimido e se $\alpha < 1$ o tempo será alongado.

2.13.3 Deslocamento no Tempo e Frequência

Dada a operação $f(t) \mapsto F(\omega)$ e $\tau \in \mathbb{R}$, a translação no regime do tempo é dado por:

$$\mathcal{F}\{f(t - \tau)\} \longleftrightarrow e^{-i\tau\omega} F(\omega). \quad (29)$$

Se τ for positivo, o deslocamento é retardado e se τ for negativo, o deslocamento é adiantado.

No regime da frequência, translação é:

$$\mathcal{F}\{e^{i\nu t} f(t)\} \longleftrightarrow F(\omega - \nu). \quad (30)$$

Da mesma forma, se ν for positivo, o deslocamento é retardado e se ν for negativo, o deslocamento é adiantado.

Além disso, este deslocamento é conhecido como modulação, em que ao fazer com que o sinal seja multiplicado por uma onda portadora conhecida, a sua frequência é modificada sem alterar o sinal original. Esta técnica é utilizada, por exemplo, em rádios AM, que convertem os sinais sonoros em ondas de maiores frequências para a realizar a sua transmissão e realizam o processo inverso quando o sinal é recebido.²⁴

2.13.4 Derivação

Por fim, para uma derivada de ordem n de uma função $f(t)$, a sua transformada é:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} \longleftrightarrow (i\omega)^n F(\omega) \text{ e } \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}\right\} \longleftrightarrow (-it)^n f(t). \quad (31)$$

²⁴HAYKIN, 2001

2.14 Transformada de Fourier Quaterniônica

Diferentemente da transformada clássica, a QFT trata de sinais quaterniônicos, ou seja, $f(t) \in \mathbb{H}$. Assim, esta transformada mapeia $f(t)$ para $F(\omega)$ em uma operação dentro do conjunto \mathbb{H} .

Como a operação é realizada em $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, logo não existirá comutatividade multiplicativa entre o kernel e o sinal.

Na transformada de Fourier complexa, o sinal do expoente pode ser invertido entre a transformada e sua inversa, desde que um padrão seja seguido, os resultados não gerarão equívocos. Já na QFT isso não é válido, devido a não comutatividade multiplicativa.

Esses dois fatos fazem com que a QFT possua oito tipos de equações: quatro transformadas e uma inversa para cada.

Essas equações são divididas entre dois pares ‘direita’ e dois pares ‘esquerda’. Elas são representadas com os sobrescritos R para a direita e L para a esquerda. E também com os subscritos $\pm\mu$ para o expoente positivo na transformada e negativo em sua inversa e $\mp\mu$ caso contrário.

Portanto, antes de realizar operações, é necessário verificar qual convenção está sendo utilizada, afim de não gerar conflitos e erros nos cálculos.

Assim, para um sinal $f(t) \in \mathbb{H}$, a sua transformada quaterniônica $F(\omega) \in \mathbb{H}$ ‘direita’ é dada como:²⁵

$$F^R(\omega) = \mathcal{F}_{\mp\mu}^R \{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\mp\mu\omega t} dt. \quad (32)$$

A sua transformada inversa é:

$$f^R(t) = \mathcal{F}_{\mp\mu}^{-R} \{F^R(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\pm\mu\omega t} d\omega. \quad (33)$$

Já a transformada quaterniônica $F(\omega) \in \mathbb{H}$ ‘esquerda’ é dada como:

$$F^L(\omega) = \mathcal{F}_{\mp\mu}^L \{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp\mu\omega t} f(t) dt. \quad (34)$$

A sua transformada inversa é:

$$f^L(t) = \mathcal{F}_{\mp\mu}^{-L} \{F^L(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm\mu\omega t} F(\omega) d\omega. \quad (35)$$

Dessa forma, considerando que os quaternions são uma extensão dos complexos, a QFT é também interpretada como uma extensão da transformada de Fourier clássica. A

²⁵ELL, 2014, p. 62 e 63

QFT generaliza a raiz complexa simples ‘i’ para várias raízes quaterniônicas μ , sendo que estas raízes podem ser quaisquer quatérnios puros unitários como mostrados na Seção 2.10.

Além disso, a transformada quaterniônica necessita que seus sinais atendam as condições de Dirchlet²⁶. Que são elas:

1. $f(t)$ deve ser absolutamente integrável em qualquer período:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty.$$

2. $f(t)$ deve ter um número finito de mínimos e máximos;
3. $f(t)$ deve ter um número finito de descontinuidades.

Estas condições são suficientes, porém não necessárias, podendo haver sinais $f(t)$ em que estas condições não são antedidas, porém ainda poderão ser transformados.

No caso de sinais elétricos de tensão e corrente alternados, este critério já é atendido, portanto não há necessidade desta verificação, o que economiza tempo e processamento computacional.²⁷

Sendo assim, propriedades básicas da QFT são: linearidade, mudança de escala, deslocamento no tempo e na frequência e derivação.²⁸

2.14.1 Linearidade

Dadas as operações $f(t) \mapsto F(\omega)$, $g(t) \mapsto G(\omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se:²⁹

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\} = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega). \quad (36)$$

Esta propriedade não necessita do rigor ‘esquerda’ ou ‘direita’, já que a multiplicação é $\mathbb{R} \times \mathbb{H}$ e a soma quaterniônica $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ é comutativa.

Prova:

²⁶ELL, 2014, p. 39

²⁷HAYKIN, 2001, p. 197

²⁸ELL, 2014, p. 64

²⁹ELL, 2014, p. 64

Seja $f(t), g(t) \in \mathbb{H}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e que seja utilizado a transformada de Fourier quaterniônica ‘direita’ dada pela equação 32, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mp}^R\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{\mp \mu \omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(t) e^{\mp \mu \omega t} + \beta g(t) e^{\mp \mu \omega t}] dt \\
&= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\mp \mu \omega t} dt + \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{\mp \mu \omega t} dt \\
&= \alpha \mathcal{F}_{\mp \mu}^R\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}_{\mp \mu}^R\{g(t)\} = \alpha F_{\mp \mu}^R(\omega) + \beta G_{\mp \mu}^R(\omega) \\
&= \alpha F(\omega) + \beta G(\omega) \blacksquare
\end{aligned}$$

O método desta prova também é válido para a transformada inversa.

2.14.2 Mudança de Escala

Dada a operação $f(t) \mapsto F(\omega)$ e $a \in \mathbb{R} \neq 0$ tem-se:³⁰

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t)\} \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \text{ e } \mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha \omega)\} \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{t}{\alpha}\right). \quad (37)$$

1. Da mesma forma que na propriedade da linearidade, esta propriedade não necessita do rigor ‘esquerda’ ou ‘direita’;
2. No domínio do tempo: Se $\alpha > 1$ a frequência será comprimida e se $\alpha < 1$ a frequência será alongada;
3. No domínio da frequência: Se $\alpha > 1$ o tempo será comprimido e se $\alpha < 1$ o tempo será alongado.

Prova:

Seja $f(t) \in \mathbb{H}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ e que seja utilizado a transformada de Fourier quaterniônica ‘direita’ dada pela equação 32, tem-se:

$$\mathcal{F}_{\mp \mu}^R\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{\mp \mu \omega t} dt$$

e por substituição simples: $t' = \alpha t \therefore t = \frac{t'}{\alpha}$ e $dt' = \alpha dt$, assim:

$$\mathcal{F}_{\mp \mu}^R\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{\mp \mu \omega \frac{t'}{\alpha}} \alpha dt' = \frac{1}{\alpha} F_{\mp \mu}^R\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \blacksquare \quad (38)$$

O método desta prova também é válido para a transformada inversa.

³⁰ELL, 2014, p. 64

2.14.3 Deslocamento no Tempo e Frequência

Dada a operação $f(t) \mapsto F(\omega)$ e $\tau \in \mathbb{R}$, a translação no regime do tempo da transformada ‘direita’ e ‘esquerda’ são respectivamente:³¹

$$\mathcal{F}_{\mp\mu}^R \{f(t - \tau)\} \longleftrightarrow F_{\mp\mu}^R(\omega) e^{\mp\mu\tau\omega} \text{ ou } \mathcal{F}_{\mp\mu}^L \{f(t - \tau)\} \longleftrightarrow e^{\mp\mu\tau\omega} F_{\mp\mu}^L(\omega). \quad (39)$$

Se τ for positivo, o deslocamento é retardado e se τ for negativo, o deslocamento é adiantado.

A translação no regime da frequência da transformada inversa ‘direita’ e ‘esquerda’ são respectivamente:

$$\mathcal{F}_{\mp\mu}^{-R} \{F^R(\omega - \nu)\} \longleftrightarrow f(t) e^{\pm\mu\nu t} \text{ ou } \mathcal{F}_{\mp\mu}^{-L} \{F^L(\omega - \nu)\} \longleftrightarrow e^{\pm\mu\nu t} f(t). \quad (40)$$

Da mesma forma, se ν for positivo, o deslocamento é retardado e se ν for negativo, o deslocamento é adiantado.

Com isso, este deslocamento é conhecido como modulação, e tem o mesmo princípio descrito na seção 2.13.3.

A aplicação pode ser a mesma da clássica, porém com um sinal $f(t) \in \mathbb{H}$.

Prova:

Seja $f(t) \in \mathbb{H}$ e $\tau \in \mathbb{R}$ e que seja utilizado a transformada de Fourier quaterniônica ‘direita’ dada pela equação 32, tem-se:

$$\mathcal{F}_{\mp\mu}^R \{f(t - \tau)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{\mp\mu\omega t} dt.$$

Por substituição simples: $t' = t - \tau \therefore t = t' + \tau$ e $dt' = dt$, assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mp\mu}^R \{f(t - \tau)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{\mp\mu\omega(t'+\tau)} dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{\mp\mu\omega t'} e^{\mp\mu\omega\tau} dt' \\ &= F_{\mp\mu}^R(\omega) e^{\mp\mu\omega\tau} \blacksquare \end{aligned}$$

O método desta prova também é válido para a transformada inversa e para a QFT ‘esquerda’ ao aplicar a não comutatividade multiplicativa corretamente.

³¹ELL, 2014, p. 64

2.14.4 Derivação

Para uma derivada de ordem n da QFT de uma função no tempo $f(t)$ e de uma função na frequência $F(\omega)$ ‘direita’ são:³²

$$\mathcal{F}_{\mp\mu}^R \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} \longleftrightarrow F_{\mp\mu}^R(\omega) [\pm\mu\omega]^n \text{ e } \mathcal{F}_{\mp\mu}^{-R} \left\{ \frac{d^n F^R(\omega)}{d\omega^n} [\pm\mu]^n \right\} \longleftrightarrow t^n f(t) \quad (41)$$

Para a ‘esquerda’ são:

$$\mathcal{F}_{\mp\mu}^L \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} \longleftrightarrow [\pm\mu\omega]^n F_{\mp\mu}^L(\omega) \text{ e } \mathcal{F}_{\mp\mu}^{-L} \left\{ [\pm\mu]^n \frac{d^n F^L(\omega)}{d\omega^n} \right\} \longleftrightarrow t^n f(t) \quad (42)$$

As propriedades da transformada clássica e da transformada quaterniônica da linearidade e mudança de escala são idênticas, já as propriedades do deslocamento e derivação são diferentes.

Isso é verificado, pois estas propriedades são influenciadas pela não comutatividade multiplicativa existente na álgebra quaterniônica, necessitando que haja o rigor da ordem da multiplicação quaterniônica.

Prova:

Seja $f(t) \in \mathbb{H}$ e que seja utilizado a transformada de Fourier quaterniônica ‘direita’ dada pela equação 32, tem-se:

$$\mathcal{F}_{\mp\mu}^R \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] e^{\mp\mu\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{\mp\mu\omega t} dt.$$

Utilizando o método de integração por partes: $\int b'(l)a(l)dl = b(l)a(l) - \int b(l)a'(l)dr$ em que $b(l) = f(t)$ e $a(l) = e^{\mp\mu\omega t} \therefore g'(t) = \mp\mu\omega e^{\mp\mu\omega t}$, assim:

$$\mathcal{F}_{\mp\mu}^R \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(t)e^{\mp\mu\omega t}]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\mp\mu)\omega e^{\mp\mu\omega t} dt. \quad (43)$$

A primeira parcela da equação converge a zero ao operar seus limites, já que $f(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Na segunda parcela, $(\mp\mu\omega)e^{\mp\mu\omega t} = e^{\mp\mu\omega t}(\mp\mu\omega)$ pois:

Multiplicação na esquerda:

$$(\mp\mu\omega)e^{\mp\mu\omega t} = [\mp\mu\omega][\cos(\omega t) \mp \mu \sin(\omega t)] = \mp\mu\omega \cos(\omega t) \pm \omega \sin(\omega t).$$

³²ELL, 2014, p. 66

Multiplicação na direita:

$$e^{\mp\mu\omega t}(\mp\mu\omega) = [\cos(\omega t) \mp \mu \sin(\omega t)][\mp\mu\omega] = \mp\mu\omega \cos(\omega t) \pm \omega \sin(\omega t).$$

Portanto a equação 43 pode ser reescrita como:

$$\mathcal{F}_{\mp\mu}^R \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = 0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\mp\mu\omega t} dt (\mp\mu\omega) = F_{\mp\mu}^R(\omega)(\pm\mu\omega)$$

Assim, pelo método de indução para $n \in \mathbb{Z}_+^*$:

$$\mathcal{F}_{\mp\mu}^R \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = F_{\mp\mu}^R(\omega)(\pm\mu\omega)^n \blacksquare$$

O método desta prova também é válido para a transformada inversa e para a QFT ‘esquerda’ ao aplicar a não comutatividade multiplicativa corretamente.

2.15 Transformada de Fourier Quaterniônica Discreta

A Transformada de Fourier Quaterniônica Discreta (DQFT) é uma generalização da transformada discreta de Fourier clássica para sinais cujas amostras pertencem ao corpo dos quatérnios. Essa generalização permite analisar simultaneamente componentes multidimensionais de um sinal, preservando relações internas entre canais que, em métodos tradicionais, seriam processados de forma separada.

A DQFT ‘direita’ é definida por:

$$X^R[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\mp 2\pi\mu nk/N} \quad (44)$$

em que o kernel é dado por:

$$e^{\mp 2\pi\mu nk/N}. \quad (45)$$

e que quando usado a relação descrita pela equação 15, torna-se:

$$\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \mp \mu \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right). \quad (46)$$

O sinal amostrado $x[n]$ também é um quatérnio, cuja possui a forma:

$$x[n] = a[n] + b[n]i + c[n]j + d[n]k. \quad (47)$$

A DQFT inversa ‘direita’ é definida por:

$$x^R[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\pm 2\pi \mu nk/N}. \quad (48)$$

Já a DQFT ‘esquerda’ é dada como:

$$X^L[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\mp 2\pi \mu nk/N} x[n]. \quad (49)$$

E sua inversa ‘esquerda’ é:

$$x^L[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\pm 2\pi \mu nk/N} X[k]. \quad (50)$$

O kernel e o sinal amostrado também são descritos pelas equações 46 e 47 respectivamente.

A DQFT também possui oito transformadas devido a mesma propriedade de não comutação multiplicativa em $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$.

Este trabalho usará a transformada discreta ‘esquerda’ mostrada na equação 49. Para aplicações computacionais, utiliza-se a Transformada de Fourier Quaterniônica Discreta (DQFT) em vez da Transformada de Fourier Quaterniônica contínua (QFT) porque os sinais simulados computacionalmente são sinais amostrados, uma vez que computadores não conseguem produzir sinais com passos de amostragem infinitesimais, que são condições obrigatórias para o uso de integrais.

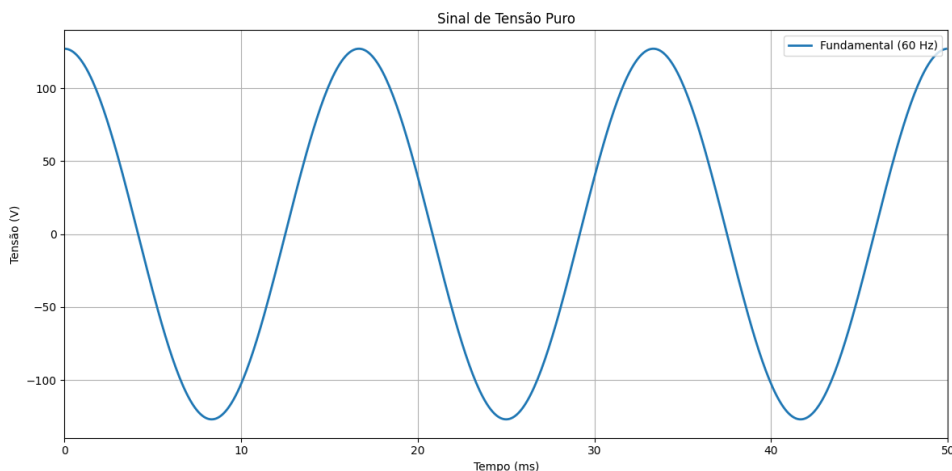
2.16 Sinais Elétricos e Distorções Harmônicas

Idealmente, um sinal de tensão no sistema elétrico de potência (SEP), é um sinal que é composto por somente uma senoidal pura, que no caso brasileiro é uma senoide de frequência de 60 Hz, conforme ilustrado na Figura 2. Outros países localizados na Europa utilizam a frequência 50 Hz³³ e outros países como o Japão, utiliza dois sistemas separados, um com 60 Hz e outro com 50 Hz.³⁴

³³Visicomm Industries.

³⁴RISE Corp. e GTN Magazine.

Figura 2 – Sinal de Tensão de 60 Hz



Fonte: Autor, 2025.

Nenhum SEP opera com sinais puros, todos os sinais apresentam algum tipo de ruído ou harmônico que são produzidos por dispositivos conectados a rede ou por interferências externas.³⁵

Cargas lineares são dispositivos compostos por componentes resistivos, capacitivos ou indutivos que produzem formas de onda de tensão ou corrente senoidais. As cargas não lineares são criadas a partir de dispositivos eletrônicos que utilizam chaveamento, como inversores, retificadores e também por dispositivos de descarga como fornos elétricos a arco e lâmpadas fluorescentes.³⁶

Estes dispositivos não lineares são os principais causadores de distorções harmônicas em sistemas elétricos. De acordo com Prodist Módulo 8, estas distorções são fenômenos associados a deformações nas formas de onda das tensões e correntes em relação à onda senoidal da frequência fundamental.

Geralmente, as distorções são classificadas em três tipos de harmônicos::

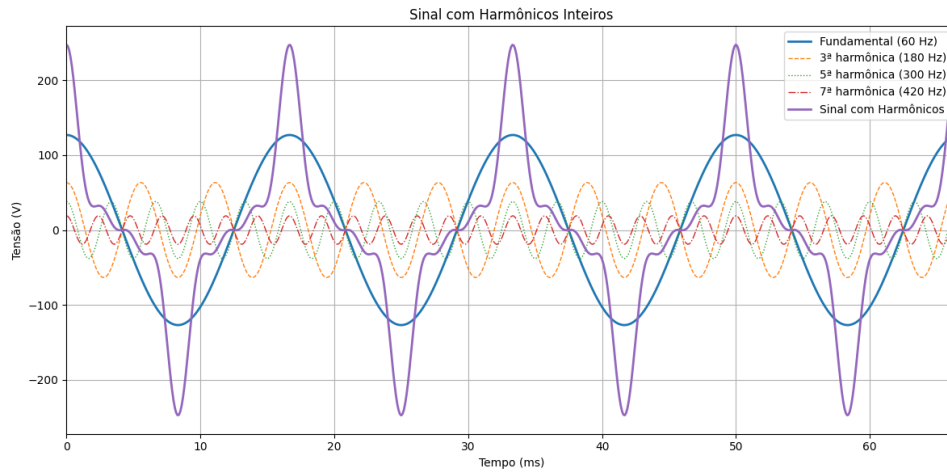
1. Harmônicos inteiros: múltiplos inteiros da frequência fundamental:

Na Figura 3 é mostrado como um sinal senoidal de 60 Hz é distorcido pelos harmônicos de 180 Hz, 300 Hz e 420 Hz.

³⁵PRODIST Módulo 8

³⁶PAREDES, 2017 e MORENO, 2019

Figura 3 – Harmônicos Inteiros

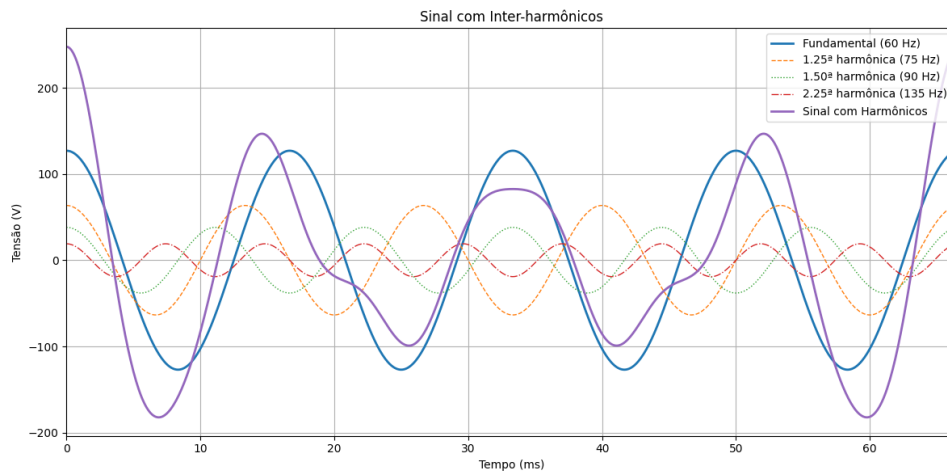


Fonte: Autor, 2025.

2. Inter-harmônicos: múltiplos não inteiros da frequência fundamental:

Na Figura 4 é ilustrado como um sinal senoidal de 60 Hz é distorcido pelos harmônicos de 75 Hz, 90 Hz e 135 Hz.

Figura 4 – Inter-harmônicos

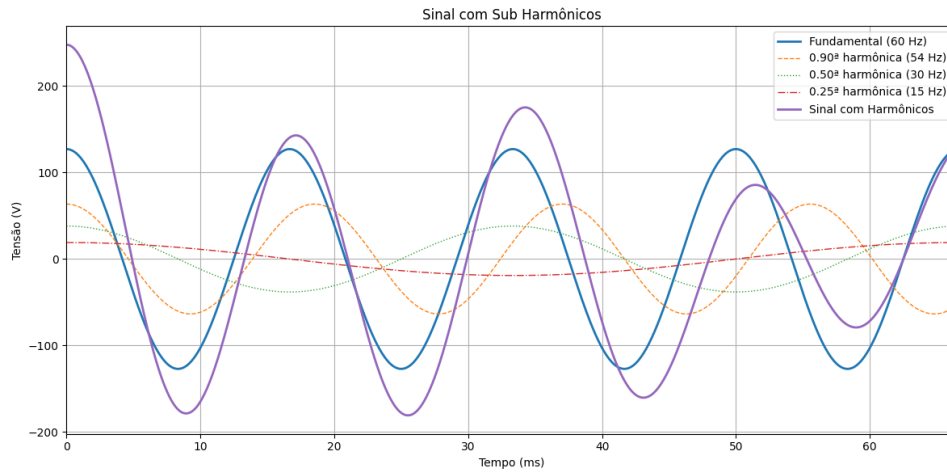


Fonte: Autor, 2025.

3. Sub-harmônicos: frequência inferior à frequência fundamental do sistema, por consequência, também são um tipo de inter-harmônicos:

Na Figura 5 é representado como um sinal senoidal de 60 Hz é distorcido pelos harmônicos de 15 Hz, 30 Hz e 54 Hz.

Figura 5 – Sub Harmônicos



Fonte: Autor, 2025.

Além dos efeitos na amplitude e frequência, os harmônicos também possuem a característica de “sequência”, que é definida pelo “giro” da fase da onda harmônica e é referenciada no sentido de giro da fase da onda fundamental. Essas sequências são divididas em positiva, negativa ou homopolar (nula).³⁷

Estas distorções harmônicas são causadoras de problemas, tais como sobreaquecimento de equipamentos e por consequência a redução de sua vida útil e de seus componentes. Como por exemplo: motores sofrem com sobreaquecimento com harmônicas de sequência positiva ao serem acelerados e com harmônicos de sequência negativa ao serem freados.³⁸

Harmônicos homopolares podem causar interferências em equipamentos de alta sensibilidade como controladores lógico programáveis (CLPs) e interferência em dispositivos de proteção como aqueles presentes em sistemas de transmissão e distribuição de energia elétrica e também causam sobreaquecimento em banco de capacitores. Isso se deve ao seu efeito de desbalanceamento que cria carregamento extra de correntes nos condutores neutros destes sistemas.³⁹

Por fim, estas distorções harmônicas nos sistemas elétricos podem ser medidas ao utilizar a transformada de Fourier (FT). Esta operação matemática, no âmbito de tratamento de sinais de tensão e corrente, tem como objetivo mapear estes sinais do domínio do

³⁷STEVENSON, 1982

³⁸PAREDES, 2017 e MORENO, 2019

³⁹MORENO, 2019

tempo para o domínio da frequência, afim de identificar quais componentes harmônicos estão presentes no sinal medido para realizar um tratamento ou estudo desejado deste sinal.

Adicionalmente, neste trabalho, os sinais elétricos são analisados considerando tanto a transformada de Fourier complexa quanto a QFT. Com isso, no próximo capítulo é apresentada a metodologia desenvolvida nesta monografia.

3 Metodologia

Primeiramente, este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa teórica, inicialmente com abordagem analítica, voltada à análise conceitual e à exposição didática da álgebra de quatérnios. A escolha por essa abordagem justifica-se pela necessidade de consolidar os fundamentos matemáticos singulares dos quatérnios e demonstrar sua aplicabilidade.

Neste contexto, sistemas com multicomponentes são os mais ideais para utilização de quatérnios, devido a sua capacidade de operação em até quatro dimensões. Assim, o tratamento de sinais elétricos trifásicos por meio de quatérnios é válido pela sua capacidade de analisar simultaneamente as três fases.

A aplicação abordada foi em relação a um programa que realiza a QFT de sinais trifásicos com o intuito de que relés programáveis possam ser simultaneamente utilizados para detecção de faltas, de sinais harmônicos inteiros, inter-harmônicos, sub-harmônicos e de desequilíbrios de fases.

3.1 Desenvolvimento Teórico dos Quatérnios

A primeira etapa do trabalho consistiu na sistematização dos conceitos fundamentais da álgebra de quatérnios. As definições, notações e representação polar foram apresentadas para contextualizar como esta álgebra é representada e como ela deve ser interpretada.

As operações com quatérnios foram abordadas, afim de conceituar suas propriedades não convencionais de operação, sendo as principais:

- Operação simultânea de quatro dimensões;
- Não comutatividade na multiplicação $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$;
- Na multiplicação $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ se encontra a soma de um produto escalar com um produto vetorial;
- A possibilidade de divisão vetorial para $\mathbb{H} \ni q \neq 0$;
- Explicitar o comportamento de quatérnios puros e unitários em operações polares.

Portanto, o entendimento das operações quaterniônicas básicas é indispensável para avançar em aplicações mais complexas, como a transformada de Fourier quaterniônica,

que exige familiaridade com a estrutura algébrica dos quatérnios e suas propriedades fundamentais.

3.2 Análise Comparativa entre QFT e FFT

A Transformada de Fourier é uma ferramenta essencial na análise de sinais e sistemas. A FFT é amplamente utilizada por sua eficiência computacional⁴⁰, enquanto a QFT surge como uma extensão natural para sinais multicomponentes, especialmente em aplicações tridimensionais e vetoriais.

A *Fast Fourier Transform* FFT é uma versão otimizada da Transformada Discreta de Fourier DFT, reduzindo sua complexidade computacional de $O(N^2)$ para $O(N \log N)$ ⁴¹. Essa eficiência a torna ideal para processamento de sinais, compressão de dados e análise espectral.

A QFT estende a FFT para o domínio dos quatérnios, permitindo a análise simultânea de múltiplos canais de informação, como cor em imagens ou componentes vetoriais em sinais físicos⁴². Ela preserva a estrutura tridimensional dos dados, oferecendo vantagens em aplicações que necessitam de precisão e pouca perda de dados.

A seguir, na Tabela 1, é apresentada uma tabela comparativa entre a Transformada Rápida de Fourier (FFT) e a Transformada de Fourier Quaterniônica (QFT), destacando suas principais diferenças em termos de estrutura matemática, complexidade computacional e aplicações.

⁴⁰MOLER e EDDINS, 2001

⁴¹MOLER e EDDINS, 2001

⁴²ELL, 2007. p 67

Tabela 1 – Comparativo entre FFT e QFT

Critério	FFT (Transformada Rápida de Fourier)	QFT (Transformada de Fourier Quaterniônica)
Natureza dos dados	Sinais unidimensionais ou escalares	Sinais multicomponentes ou vetoriais
Base matemática	Números complexos	Quatérnios
Complexidade computacional	$O(N \log N)$	Varia com a implementação, mas sempre maior que FFT
Preservação de dados	Limitada	Preserva fase e orientação tridimensional
Aplicações típicas	Processamento de áudio, compressão, espectroscopia	Processamento de imagens coloridas, sinais e computação gráfica
Comutatividade	Comuta	Não comuta

Fonte: Autor, 2025.

Embora a FFT continue sendo a escolha padrão para muitas aplicações, a QFT se destaca em contextos onde a estrutura multidimensional dos dados é relevante como a análise de sinais trifásicos para detecção de harmônicos, faltas e desequilíbrios de fases que podem ser aplicadas em relés programáveis para proteção em linhas de transmissão ou em ambientes industriais.

Por tratar os três componentes de fase como um único sinal quaterniônico e preservar simultaneamente informações de magnitude, fase e orientação espacial, a QFT favorece a detecção precisa de assimetrias e distúrbios característicos de faltas elétricas mais comuns, como as de curto-circuito monofásico e bifásico, além de poder detectar desequilíbrios entre fases.

Essa abordagem contribui para o desenvolvimento de algoritmos mais completos, capazes de identificar falhas com maior confiabilidade em sistemas de proteção avançados.

Na sequência, é apresentado o programa desenvolvido nesta monografia

3.3 Programa de Detecção

O código do programa foi implementado utilizando a linguagem de programação de alto nível *Python* na versão 3.13 no ambiente de programação *VS Code* da *Microsoft*. O programa analisa os sinais trifásicos via FFT e QFT e realiza a detecção de harmônicos e de flutuações de tensões.

Para isso, o desequilíbrio de tensão é o fenômeno caracterizado por qualquer diferença verificada nas amplitudes entre as três tensões de fase de um determinado sistema trifásico, e/ou na defasagem elétrica de 120° entre as tensões de fase do mesmo sistema.⁴³

Este desequilíbrio ocorre quando há diferenças de magnitude ou defasagem entre as fases, causando sérios prejuízos ao desempenho e à vida útil dos equipamentos. Entre os principais efeitos estão o aquecimento excessivo, a redução do rendimento, vibrações e desgaste mecânico.⁴⁴

Neste contexto, o programa utiliza algumas bibliotecas⁴⁵ para auxiliar na sua construção, são elas:

- 3.3.a) *numpy*: utilizada para aumentar a velocidade no processamento volumoso de amostras;
- 3.3.b) *matplotlib.pyplot*: utilizada para desenhar os gráficos das FFTs e da QFT;
- 3.3.c) *scipy.signal*: utilizada para manipulação de sinais, neste programa em específico, foi importado somente a função *find_peaks* para encontrar os picos de frequência e amplitudes nas amostras pós FFT e QFT.

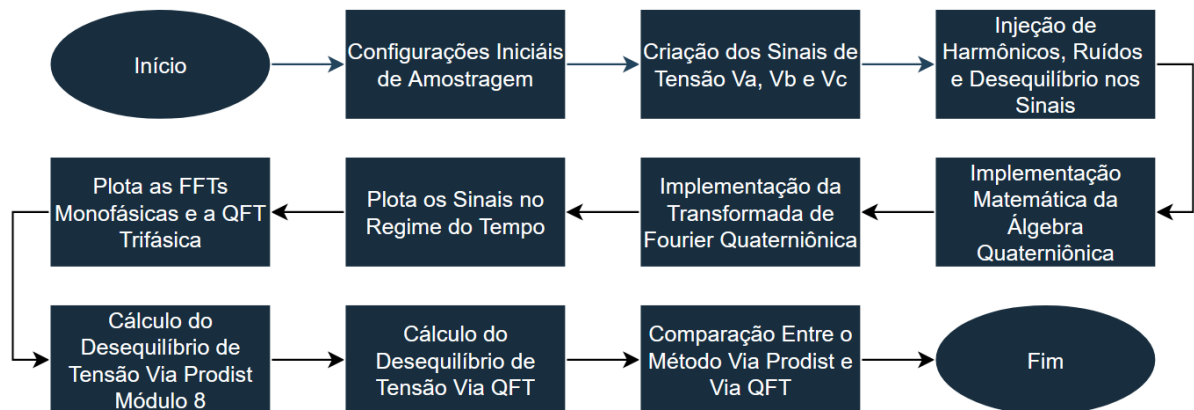
O fluxograma mostrado na Figura 6 apresenta a sequência de etapas do código desenvolvido para análise do desequilíbrio de tensões trifásicas por meio da QFT.

⁴³Prodinst Módulo 8, p. 16

⁴⁴PAULILO, 2006, p. 19

⁴⁵Existe a biblioteca *quaternion* que pode ser utilizada como alternativa na programação, que não foi utilizada neste código por preferência do autor.

Figura 6 – Fluxograma do Código



Fonte: Autor, 2025.

Dessa forma, o processo abrange desde a configuração dos parâmetros de amostragem e geração dos sinais trifásicos até os cálculos de desequilíbrio de tensão pelos métodos via Prodist e QFT.

Na etapa inicial do programa, são definidas as configurações necessárias para a geração e análise dos sinais elétricos.

Primeiramente, estabelece-se a frequência de amostragem que é responsável por determinar a taxa com que o sinal contínuo será discretizado e a duração total do sinal. Em seguida, é criado o vetor de tempo, utilizando a função *np.arange*, o qual representa os instantes de amostragem do sinal. O número total de amostras N é obtido a partir do tamanho deste vetor. Na Figura 7 é mostrado parte do código implementado que evidencia tal procedimento.

Figura 7 – Configurações Iniciais

```

1 # ----- Configurações -----
2 fs = 2048 # Frequência de Amostragem (Hz)
3 duration = 2 # Duração (s)
4 t = np.arange(0, duration, 1/fs) # Cria o array com passo desejado
5 N = t.size # Número total de amostras
6 f0 = 60.0 # Frequência Fundamental (Hz)
7 rng = np.random.default_rng(0) # Adiciona ruído para simular condições reais
8 # -----
9
10 # ----- Cria a Função de Sinal -----
11 def make_phase_component(fre=0, amplitude=0, phase=0, phase_shift_deg=0):
12     return amplitude * np.sin(2*np.pi*freq*t + np.deg2rad(phase +
13         phase_shift_deg))
14 Va = np.zeros_like(t)
15 Vb = np.zeros_like(t)
16 Vc = np.zeros_like(t)
17 # -----

```

Fonte: Autor, 2025.

Na sequência, definiu-se também a frequência fundamental do sinal, correspondente à frequência típica de sistemas elétricos de corrente alternada no Brasil: 60 Hz. Para tornar a simulação mais realista, um gerador de números aleatórios é utilizado para simular flutuações aleatórias nos sinais de tensão.

Por meio da função *make_phase_component*, é gerado um componente senoidal que será utilizado para a construção dos sinais que serão simulados posteriormente.

Na Figura 8 é ilustrado como foi realizada a composição do sinal trifásico a partir da inserção de componentes harmônicas, inter-harmônicas e ruídos. Inicialmente, são definidos os múltiplos da frequência fundamental correspondentes aos harmônicos inteiros e inter-harmônicos que serão adicionados ao sinal, que são:

- Três harmônicos inteiros: 120 Hz, 180 Hz e 300 Hz;
- Dois inter-harmônicos: 90 Hz e 132 Hz.

Em seguida, por meio de laços de repetição, o código gera e soma cada componente senoidal às fases.

Figura 8 – Injeção de Harmônicos e Ruídos

```

1 # ----- Harmônicos e Inter-Harmônicos -----
2 int_harmonics_mult = [1, 2, 3, 5]# Fundamental (60Hz), 2° harmônico (120Hz), 3°
   harmônico (180Hz) e 5° harmônico (300Hz)
3 interharmonic_mult = [1.5, 2.2] # 1.5° inter-harmônico (90 Hz) e 2.2° inter-
   harmônico (132Hz)
4 # -----
5 # ----- Injeta o Sinal Fundamental, Harmônicos Inteiros, Inter-harmônicos
   e Ruídos -----
6 for mult in int_harmonics_mult:
7     freq = mult * f0
8     amp = 1.0 / mult
9     phase = rng.uniform(0, 360)
10    Va += make_phase_component(freq, amp, phase, 0)
11    Vb += make_phase_component(freq, amp, phase, -120)
12    Vc += make_phase_component(freq, amp, phase, +120)
13 for mult in interharmonic_mult:
14    freq = mult * f0
15    amp = 0.3 / mult
16    phase = rng.uniform(0, 360)
17    Va += make_phase_component(freq, amp, phase, 0)
18    Vb += make_phase_component(freq, amp, phase, -120)
19    Vc += make_phase_component(freq, amp, phase, +120)
20 for V in [Va, Vb, Vc]:
21    V += 0.01 * np.sin(2*np.pi*1*t + rng.uniform(0, 2*np.pi))
22 noise_std = 0.1 # Ruído égerado quando noise_std > 0
23 Va_noisy = Va + rng.normal(0, noise_std, size=N)
24 Vb_noisy = Vb + rng.normal(0, noise_std, size=N)
25 Vc_noisy = Vc + rng.normal(0, noise_std, size=N)
26 # -----

```

Fonte: Autor, 2025.

Essa etapa permite simular fenômenos de deformação de forma de onda, essenciais para a análise mais próxima aos sistemas elétricos reais.

Na Figura 9 é apresentada o trecho de código responsável pela implementação das operações quaterniônicas das Seções 2.4, 2.6 e 2.10 que são utilizadas no processamento do sinal trifásico simulado. Além disso, realiza a criação do sinal quaterniônico após o quatérnio *q_signal* receber simultaneamente os três sinais.

Figura 9 – Implementação dos Quatérnios

```

1 # ----- Produto, Norma Quaterniônicos e Quatérnio Puro e Unitário -----
2 def q_mul(a, b):
3     w1, x1, y1, z1 = a[...],0], a[...],1], a[...],2], a[...],3]
4     w2, x2, y2, z2 = b[...],0], b[...],1], b[...],2], b[...],3]
5     w = w1*w2 - x1*x2 - y1*y2 - z1*z2
6     x = w1*x2 + x1*w2 + y1*z2 - z1*y2
7     y = w1*y2 - x1*z2 + y1*w2 + z1*x2
8     z = w1*z2 + x1*y2 - y1*x2 + z1*w2
9     return np.stack([w, x, y, z], axis=-1)
10
11 def q_norm(a):
12     return np.sqrt(np.sum(a**2, axis=-1))
13
14 mu = np.array([0.0, 1.0, 1.0, 1.0]) # Neste caso: mu = (0 + i + j + k)
15 mu[1:] /= np.linalg.norm(mu[1:]) # Normaliza o quatérnio puro
16 # -----
17
18 # ----- Cria o Sinal Quaterniônico -----
19 q_signal = np.stack([np.zeros_like(Va_noisy), Va_noisy, Vb_noisy, Vc_noisy],
20                     axis=-1) # q = 0 + Va*i + Vb*j + Vc*k

```

Fonte: Autor, 2025.

Na Figura 10 é ilustrado o trecho de código responsável pela implementação manual da QFT discreta, na sua forma ‘esquerda’.

Figura 10 – Implementação da DQFT

```

1 # ----- Realiza a QFT Discreta Esquerda Manualmente:  $Q[k] = \sum_n \exp(-\mu$ 
   *  $2\pi kn/N) * q[n]$  -----
2 ks = np.arange(N) # Cria um array para amostras de frequências
3 ns = np.arange(N) # Cria um array para amostras de tempo
4 theta = 2*np.pi/N * (ks[:, None] * ns[None, :]) # Cria uma matriz de frequência
   por tempo
5
6 cos_t = np.cos(theta) # Define cosseno para reescrita polar
7 sin_t = np.sin(theta) # Define seno para reescrita polar
8
9 exp_left = np.empty((N, N, 4)) # Cria uma matriz 3D para acomodar os elementos
   quaterniônicos
10 exp_left[...,0] = cos_t # Realiza a Distributiva:  $\exp(-\mu * \theta) = \cos(\theta) +$ 
    $(-\mu) * \sin(\theta)$ 
11 exp_left[...,1] = -mu[1]*sin_t # Realiza a Distributiva
12 exp_left[...,2] = -mu[2]*sin_t # Realiza a Distributiva
13 exp_left[...,3] = -mu[3]*sin_t # Realiza a Distributiva
14
15 q_broadcast = q_signal[None, :, :] # Recebe os valores das amostras em q_signal
16 prod_left = q_mul(exp_left, q_broadcast) # Realiza a multiplicação:  $\exp(-\mu * 2$ 
    $\pi kn/N) * q[n]$ 
17 QFT = prod_left.sum(axis=1) # Realiza a soma de todas as amostras
18 QFT_mag_full = q_norm(QFT) / N # Magnitude bilateral normalizada
19 # -----

```

Fonte: Autor, 2025.

Esta função utiliza a equação 49 e a propriedade exponencial mostrada na equação 46. Além disso, para a visualização dos sinais no regime do tempo, das três FFTs e da DQFT, foi utilizada a biblioteca do item 3.3.b) em conjunto com a do item 3.3.c).

Adicionalmente, o código também executa o desequilíbrio de tensão de acordo com o modelo proposto pelo módulo 8 do Prodist, utilizando componentes simétricas, como mostrado na Figura 11.

Figura 11 – Desequilíbrio de Tensão pelo método Prodist

```

1  # ----- Calcula os Fasores Fundamentais de Va, Vb e Vc -----
2  def fundamental_phasor(signal, fs, f0):
3      N = len(signal)
4      fft_vals = np.fft.rfft(signal)
5      freqs = np.fft.rfftfreq(N, 1/fs)
6      idx_f0 = np.argmin(np.abs(freqs - f0))
7      phasor = fft_vals[idx_f0] / (N/2)
8      return phasor
9  Va_ph = fundamental_phasor(Va_noisy, fs, f0)
10 Vb_ph = fundamental_phasor(Vb_noisy, fs, f0)
11 Vc_ph = fundamental_phasor(Vc_noisy, fs, f0)
12 # -----
13 # ----- Componentes Simétricas -----
14 a = np.exp(1j * 2*np.pi/3) # Operador de sequência positiva
15 V1 = (Va_ph + a * Vb_ph + a**2 * Vc_ph) / 3 # Sequência positiva
16 V2 = (Va_ph + a**2 * Vb_ph + a * Vc_ph) / 3 # Sequência negativa
17 # -----
18 # ----- Cálculo do FD% Segundo PRODIST Módulo 8 -----
19 FD_PM8_percent = abs(V2) / abs(V1) * 100
20 print("\nCálculo pelo PRODIST Módulo 8:")
21 print(f"V+={abs(V1):.2f}")
22 print(f"V-={abs(V2):.2f}")
23 print(f"\nFD_PM8%={FD_PM8_percent:.2f}%")
24
25 if FD_PM8_percent > 2.0:
26     print("Desequilíbrio acima do permitido. [Método do PRODIST Módulo 8 (FD > 2%)] .")
27 else:
28     print("Desequilíbrio dentro do valor permitido. [Método do PRODIST Módulo 8 (FD ≤ 2%)] .")
29 # -----

```

Fonte: Autor, 2025.

Portanto, o fator de desequilíbrio de tensão FD é calculado utilizando o Método da QFT, que realiza um cálculo simples de desvio. Inicialmente, o programa identifica o índice do componente espectral correspondente à frequência fundamental e extrai seu módulo, conforme mostrado nas linhas 3 e 4 na Figura 12.

Figura 12 – Desequilíbrio de Tensão pelo método da QFT

```

1 # ----- Cálculo pelo Método da Transformada de Fourier Quaterniônica QFT
   -----
2 idx_Q_f0 = np.argmin(np.abs(freqs - f0))
3 Q_f0_mag = QFT_mag_pos[idx_Q_f0]
4 FD_QFT_percent = abs((np.sqrt(6) - Q_f0_mag) / Q_f0_mag) * 100
5 if FD_QFT_percent > 100.00:
6     FD_QFT_percent = 100
7 print("\nCálculo pelo Método da QFT:")
8 print(f"|f0|={Q_f0_mag:.2f}")
9 print(f"\nFD_QFT%={FD_QFT_percent:.2f}%")
10 if FD_QFT_percent > 2.0:
11     print("Desequilíbrio acima do limite permitido. [Método da QFT (FD > 2%)] ."
12         )
13 else:
14     print("\nDesequilíbrio dentro do limite permitido. [Método da QFT (FD < 2%)] .")
15 # -----
16 # ----- Comparação -----
17 print("\n-----Comparação-----")
18 print(f"Produt_{FD_PM8_percent:.3f}%")
19 print(f"_{QFT}_{FD_QFT_percent:.3f}%")
20 avg_percent = abs(FD_PM8_percent - FD_QFT_percent)
21 print(f"Variação_{avg_percent:.3f}%")
22 print("-----")
23 # -----

```

Fonte: Autor, 2025.

Com o valor do módulo da amplitude da frequência fundamental encontrado, é

efetuado um simples cálculo de desvio conforme a equação a seguir:

$$FD_{\text{QFT}}(\%) = \frac{(\sqrt{6} - Q_{f_0}^{\text{mag}})}{Q_{f_0}^{\text{mag}}} 100. \quad (51)$$

Ressalta-se que o valor de $\sqrt{6}$ adotado nesta equação corresponde à amplitude de referência da componente fundamental obtida a partir da QFT para um sistema trifásico perfeitamente equilibrado.

Esse valor foi determinado a partir do módulo do fasor quaterniônico associado a frequência fundamental quando as tensões das três fases apresentam amplitudes iguais e defasagem de 120° , ou seja, sob condição de equilíbrio ideal.

Dessa forma, o número $\sqrt{6}$ atua como uma referência normalizada que representa o módulo esperado do vetor quaterniônico fundamental em regime balanceado. Quando ocorre um desequilíbrio entre as fases, o módulo $Q_{f_0}^{\text{mag}}$ se afasta deste valor referência.

Conseqüentemente, o desvio relativo entre o valor obtido e o valor de referência é utilizado para expressar o fator de desequilíbrio via QFT e posteriormente compará-lo com o método via Prodist.

Em suma, três sinais de tensão foram simulados e neles foram injetados ruídos e harmônicos. Tiveram seus espectros de frequência analisados por três FFTs em cada fase e uma QFT para o sinal trifásico, em que cada componente imaginária deste quatérnio recebeu um dos sinais simulados: $\vec{q} = 0 + V_a i + V_b j + V_c k$. Assim a QFT retornou sua análise espectral e mostrou quais frequências trifásicas o compõe.

E por fim, foi calculado o índice de desequilíbrio entre fases utilizando o método previsto pelo Prodist módulo 8 e pelo método de desvio utilizando a QFT e tiveram seus resultados comparados.

No próximo capítulo, são apresentados os resultados e a discussão deste trabalho.

4 Resultados e Discussões

Primeiramente, além dos resultados práticos da implementação computacional desenvolvida no Capítulo 3, ressalta-se que um dos principais resultados deste trabalho é a realização de uma fundamentação teórica e didática sobre a álgebra dos quatérnios, direcionada especificamente ao nível de graduação.

Conforme identificado e discutido no início da monografia, existe uma lacuna significativa na abordagem dos quatérnios dentro da formação acadêmica padrão em Engenharia Elétrica, onde este formalismo matemático é quase inexistente. Assim, este trabalho buscou também preencher essa lacuna, e o Capítulo 2 representa a ação proposital de criar um material de referência acessível.

Adicionalmente, o desenvolvimento teórico foi estruturado de forma sistemática, progredindo desde as definições algébricas fundamentais, como soma, multiplicação, módulo e conjugado, até os conceitos mais complexos, como a exponenciação, o logaritmo e a representação polar quaterniônica.

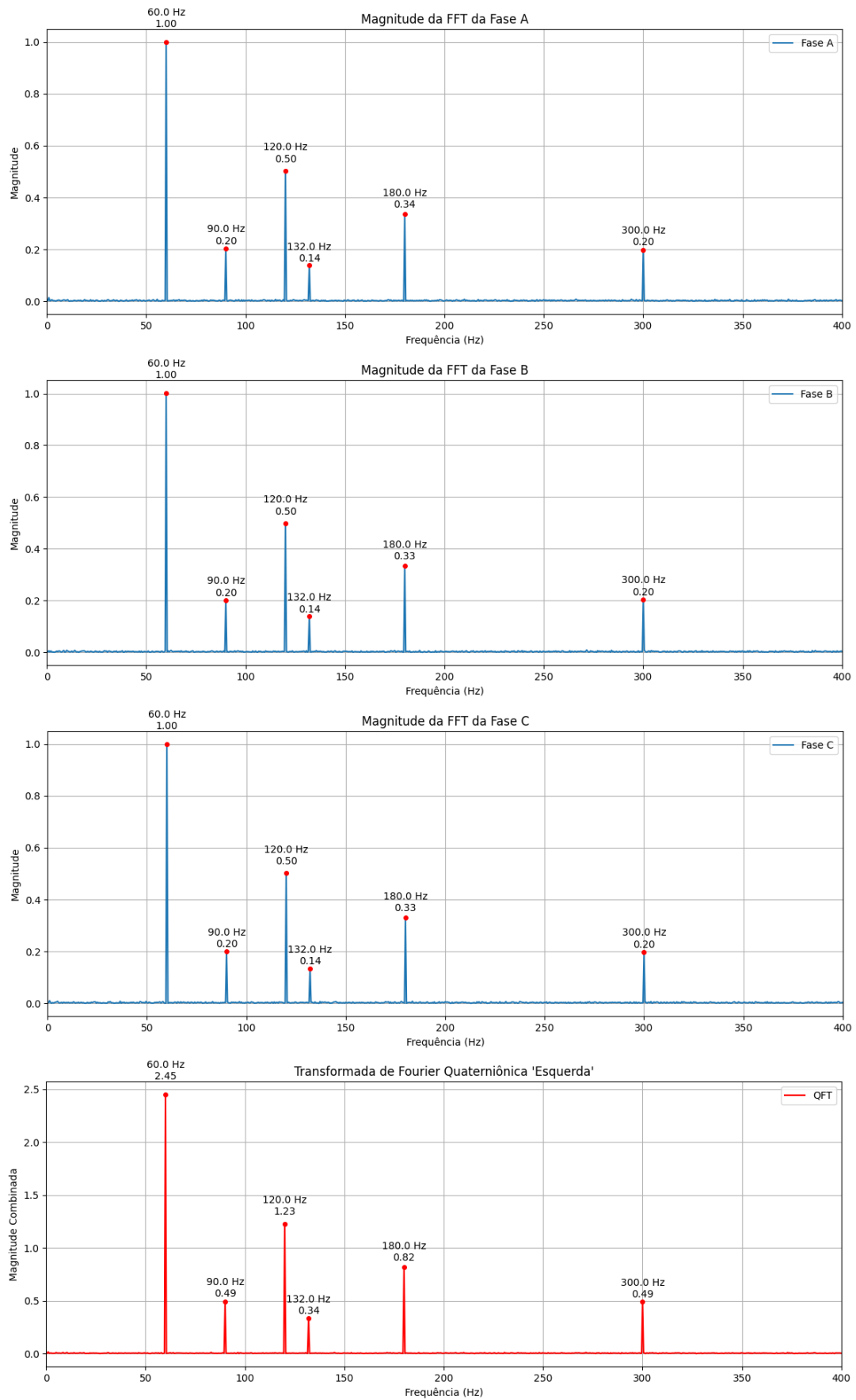
Com isso, este formalismo matemático detalha também as propriedades singulares, como a não comutatividade multiplicativa e a definição de quatérnios puros e unitários. Portanto, este trabalho oferece aos estudantes de graduação uma referência básica, além de permitir que eles possam aplicar a álgebra quaterniônica em outras aplicações no âmbito da Engenharia Elétrica.

Posteriormente, a implementação da QFT em linguagem Python permitiu analisar sinais trifásicos de tensão em SEP. Assim, os sinais simulados foram submetidos a duas abordagens distintas:

- Método clássico: foram aplicadas três FFTs independentes, uma para cada fase;
- Método quaterniônico: uma única QFT foi aplicada no sistema trifásico completo.

Os espectros de frequência dos sinais trifásicos obtidos pela FFT e QFT são mostrados na Figura 13.

Figura 13 – Comparação entre os espectros de frequência obtidos pela FFT e QFT



Analisando a Figura 13, no contexto da FFT, verifica-se que os três gráficos exibem os espectros de magnitude para as fases A, B e C, calculados de forma independente. Observa-se que os três espectros são idênticos. Isso indica que o sinal trifásico possui uma distorção harmônica perfeitamente balanceada, onde cada fase contém as mesmas componentes de frequência com as mesmas magnitudes.

As componentes de frequência e suas respectivas magnitudes (normalizadas) identificadas pela FFT em cada fase são listadas na Tabela 2.

Observando a Figura 13, visualiza-se o resultado da QFT, que processa as três fases simultaneamente. Além disso, as componentes de frequência do espectro resultante, que é chamado de magnitude combinada, são comparadas com as dispostas na Tabela 2.

Tabela 2 – Comparação entre magnitudes FFT e QFT e a relação entre elas

Frequência (Hz)	Magnitude FFT (por fase)	Magnitude QFT (combinada)	Relação (QFT/FFT)
60	1,00	2,45	2,45
90	0,20	0,49	2,45
120	0,50	1,23	2,46
132	0,14	0,34	2,43
180	0,34	0,82	2,41
300	0,20	0,49	2,45

Fonte: Autor, 2025.

Adicionalmente, a QFT identificou exatamente o mesmo conjunto de componentes de frequência presentes no sinal, mostrando a eficácia na detecção das distorções harmônicas. Com isso, a principal vantagem da abordagem quaterniônica é desenvolver a análise das três fases em uma única operação e um único espectro. Assim, na Tabela 2 é realizada a comparação dos métodos utilizados.

Em suma, a QFT identificou os componentes de frequência que a FFT detecta. Ademais, a magnitude combinada da QFT não é uma simples soma das magnitudes individuais, mas sim uma medida agregada que se mostra consistentemente proporcional (entre 2,41 e 2,46) à magnitude da FFT de uma única fase para este sinal balanceado. Assim, nota-se que para a QFT ser normalizada e indicar uma análise monofásica, em que

as três fases possuem harmônicos simétricos, basta dividir as magnitudes das frequências por $\sqrt{6} \approx 2,45$.

Além disso, do ponto de vista computacional, a QFT apresentou maior custo de processamento e complexidade de implementação, do que a FFT. Contudo, sua interpretação geométrica e capacidade de integrar múltiplas dimensões em uma única transformada tornam-se uma importante ferramenta.

Na sequência é realizada uma avaliação quantitativa, comparou-se o índice de desequilíbrio obtido pelo método do PRODIST Módulo 8 com o índice calculado pela QFT.

Em simulações com cenários de flutuação de tensão na faixa de 0,5 p.u. a 1,93 p.u. por fase, o método QFT demonstrou uma excelente concordância ao padrão. Os resultados indicaram um desvio percentual mínimo, situado entre 0,02% e 1,01%, em relação ao método proposto pelo PRODIST. Este resultado atesta a viabilidade teórica da QFT, bem como a precisão para aplicações práticas de análise de qualidade de energia elétrica, mesmo sob condições de variação de tensão.

No entanto, para flutuações bifásicas e trifásicas de tensão, o método QFT apresenta grandes desvios em relação ao método PRODIST, mostrando baixa eficácia na detecção.

E caso as fases sejam igualmente desviadas de seus valores nominais, a QFT consegue detectar este afundamento ou elevação de tensão equilibrada, trazendo uma qualidade não prevista em relação ao método do PRODIST. Por fim, conclui-se que, a QFT é uma ferramenta precisa, com aplicabilidade prática e alinhada aos padrões de Engenharia Elétrica para a análise de distúrbios e qualidade de energia em sistemas elétricos trifásicos.

5 Considerações Finais

Este trabalho de conclusão de curso investigou a estrutura algébrica dos quatérnios e sua aplicação prática na análise de sinais trifásicos no contexto da Engenharia Elétrica. O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma implementação computacional da QFT em linguagem Python e avaliar sua viabilidade como uma alternativa metodológica à FFT e aos padrões de análise de desequilíbrio de tensão recomendados pelo PRODIST.

Além disso, devido a lacuna existente dos conceitos de quatérnios nos cursos de Engenharia Elétrica, a fundamentação teórica foi desenvolvida para ser um material didático básico. Dessa forma, foram apresentados os conceitos necessários para a compreensão da álgebra quaterniônica, desde suas definições e operações fundamentais até a derivação da QFT. Com isso, este material serve como uma referência introdutória para os estudantes de Engenharia Elétrica que desejam explorar este arcabouço teórico.

Posteriormente, realizou-se a implementação prática da QFT em sinais trifásicos. Os espectros de frequência gerados pela QFT demonstraram concordância com os resultados obtidos pelas três FFTs monofásicas independentes. Além disso, a validação foi constatada comparando quantitativamente o método QFT com o padrão estabelecido pelo PRODIST Módulo 8. Os resultados demonstraram uma excelente concordância utilizando a abordagem quaterniônica para o cenário específico: para as flutuações de tensão por fase na faixa de 0,5 p.u. a 1,93 p.u. seus desvios percentuais em relação ao método PRODIST foram relativamente baixos, situando-se entre 0,02% e 1,01%.

A principal vantagem da QFT, confirmada por este estudo, deve-se ao fato deste artifício tratar o sistema trifásico como uma entidade vetorial única. Tal abordagem preserva as informações de interação entre fases, orientação espacial e fase dos dados, características que são inerentemente perdidas na análise por múltiplas FFTs monofásicas. Contudo, este detalhamento da QFT acarreta num aumento do custo de processamento, isto é, a QFT demanda maior custo computacional e uma complexidade de implementação superior a FFT.

Adicionalmente, o presente estudo também identificou que o método QFT apresenta baixa eficácia na detecção de flutuações bifásicas e trifásicas não simétricas. Esta constatação, embora demonstre uma limitação, não inviabiliza a utilização do método. Com isso, para os próximos trabalhos, um dos principais desafios é otimizar computacionalmente o algoritmo e validar seus resultados com sinais experimentais reais.

Por fim, a QFT constitui uma extensão matemática consistente da FFT. Embora sua complexidade computacional seja um fator a ser considerado, sua capacidade de análise unificada oferece uma ferramenta analítica efetiva. Ademais, o uso da álgebra quaterniônica no tratamento de sinais não apenas amplia a interpretação matemática dos fenômenos elétricos, como também introduz novas possibilidades de aplicações em Engenharia Elétrica.

5.1 Trabalhos Futuros

Como perspectivas de continuidade, recomenda-se:

- Solucionar o problema de alto desvio em flutuações não simétricas bifásicas e trifásicas;
- Implementar QFT para detecção de faltas e variações de tensões de curta duração;
- Investigar otimizações computacionais da QFT visando reduzir seu custo operacional, tornando-a mais competitiva frente a FFT em aplicações práticas;
- Ampliar a análise para sinais experimentais reais de sistemas elétricos industriais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA – ANEEL. **Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Elétrico Nacional - PRO-DIST: Módulo 8. Qualidade da Energia Elétrica.** Brasília, DF: ANEEL, 2020. Disponível em: [Agência Nacional de Energia Elétrica - ANEEL](#). Acesso em: 04/10/2025.

ÁVILA, Geraldo. **Variáveis Complexas.** 3 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

ANÁLISE E MITIGAÇÃO DE HARMÔNICAS EM SISTEMA DE ENERGIA ELÉTRICA. **RECIMA21 - Revista Científica Multidisciplinar - ISSN 2675-6218**, [S. l.], v. 5, n. 11, p. e5115924, 2024. DOI: 10.47820/recima21.v5i11.5924. Disponível em: [RECIMA 21](#). Acesso em: 4/10/2025.

BOMBELLI, Raphael. **L'algebra Parte Maggiore Dell'Aritmetica Divisa in Tre Libri.** 1 ed. Itália: Nella Stamperia di Giouanni Rossi, 1572.

BURTON, David M. **The History of Mathematics: An Introduction.** 7 ed. Universidade de Nova Hampshire. p. 802. 2011. Disponível em: [Universidade de Illinois](#). Acesso em: 14/01/2025.

CARDANO, Gerolamo. **Artis Magnae, Sive de Regulis Algebraicis Liber Unus.** 1 ed. Itália: Joh. Petreius, 1545.

CHURCHILL, Ruel V. **Complex Variables and Applications.** 2 ed. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1960.

ELL, Todd A.; BIHAN, Nicolas Le; SANGWINE, Stephen J. **Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing.** Grã Bretanha: ISTE, 2014.

FERNANDEZ, Cecília de Souza; SANTOS, Raphael Antunes dos. **O Teorema Fundamental da Álgebra.** Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, Paraíba 18 out. 2010. Disponível em: [Departamento de Matemática UFPB](#).

Acesso em 20/11/2023.

GHASEMAGHAEI, Maryam. **Understanding the impact of big data on firm performance: The necessity of conceptually differentiating among big data characteristics**. McMaster University, 2019. Disponível em: International Journal of Information Management. Acesso em: 24/07/2025.

GONZÁLEZ DÍAZ, F. R.; BADENES, V. M.; GARCÍA SALCEDO, R. **Educational Perspectives on Quaternions: Insights and Applications**. Universidad Internacional de Valencia, 2024. Disponível em: Cornell University Arxiv. Acesso em: 06/08/2024.

HAYKIN, Simon; VEEN, Barry Van. **Sinais e Sistemas**. 1 ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

HUFFMAN, Cynthia J. **Mathematical Treasure: Raphael Bombelli's L'algebra**. Mathematical Association of America, Pittsburg State University, dez. 2019. Disponível em: [Mathematical Association of America](#). Acesso em: 20/11/2023.

LOTUFO, Anna Diva Plasencia. **Matemática Aplicada à Engenharia Elétrica**. Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, 19 nov. 2019. Disponível em: Departamento de Engenharia Elétrica da UNESP.. Acesso em: 22/09/2025.

MCDONALD, J. **Teaching Quaternions is not Complex**. DePaul University, Chicago, 2010. Disponível em: Eurographics Digital Library. Acesso em: 06/08/2024.

MERINO, Orlando. **A Short History of Complex Numbers**. MIT Mathematics, University of Rhode Island, jan. 2009. Disponível em: [MIT Mathematics](#) Acesso em: 15/11/2023.

MORENO, Hilton. **Harmônicas nas Instalações Elétricas, causas, efeitos e soluções**. International Copper Association Brazil, 2019. Disponível em: Leonardo

Energy.

MOLER, Cleve; EDDINS, Steve. **Faster Finite Fourier Transforms**. MathWorks, 2001. Disponível em: [MathWorks – FFT Optimization in MATLAB](#). Acesso em: 05/11/2025.

MULCAHY, Colm; COLLEGE, Spelman; DESTRADE, Michel. The most famous graffiti in the history of maths. **Raidió Teilifís Éireann**, Irlanda, 17 out. 2022. Disponível em: [RTÉ NEWS](#). Acesso em: 14/01/2025.

PACIOLI, Luca. **Summa de Arithmetica**. 1 ed.Veneza: Paganini, 1494.

PAREDES, Morales; dos Reis. Paulo Henrique; DECKMANN, Sigmar. **Caracterização de cargas lineares e não lineares em condições de tensões não senoidais**. UNESP e UNICAMP, Brasil, 2017. Disponível em: Associação Brasileira de Eletrônica de Potência (SOBRAEP). Acesso em: 22/09/2025.

PAULILO, Gilson; *et al.* Fascículos: Qualidade de Energia. **Revista O Setor Elétrico**, Brasil, 2006.

PETERS, Christen. **The Reality of the Complex: The Discovery and Development of Imaginary Numbers**. Tennessee. p. 21. 2018. Disponível em: [Mathematical Association of America](#). Acesso em: 15/11/2023.

SAUTER, Esequia; AZEVEDO, Fabio Santos. **Análise de Fourier. Um Livro Colaborativo**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. p. 104. 2022. Disponível em: [Universidade Federal do Rio Grande do Sul \(UFRGS\)](#). Acesso em: 22/09/2025.

SCHAFER, Richard D. **An Introduction to Nonassociative Algebras**. 1 ed. Estados Unidos: Project Gutenberg, 2008.

Simple Guide to International Power Frequencies. **Visicomm Industries**. Burlington,

18 mar. 2022. Disponível em: [Visicomm - International Power Frequencies](#). Acesso em: 06/10/2025.

SJÖDIN, Tord. **A short proof of d'Alembert's Theorem**. Universidade de Umeå. p. 2. 2024. Disponível em: [Cornell University](#). Acesso em: 14/01/2025.

SOUSA, Luiz Américo Rico de; SILVEIRA, Paulo Márcio da; DUQUE, Carlos Augusto. **Proposta para cálculo de indicadores globais de sub-harmônicos e inter-harmônicos**. Sociedade Brasileira de Automática - SBA, v. 2, n. 1, 2020. DOI: 10.48011/asba.v2i1.1515. Disponível em: [Sociedade Brasileira de Automática - Articles](#). Acesso em 04/10/2025.

STEVENSON, W. D. **Análise de sistemas de potência**. 4. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.

Using Home Appliances Brought to Japan — Guide to Living in Japan. **RISE Corp.** Tokio, 19 jun. 2019. Disponível em: [RISE Corp. - Guide to Living in Japan](#). Acesso em: 06/10/2025.

Using Electricity in Japan: A Comprehensive Guide for Foreign Visitors. **GTN Magazine**. Japão, 19 set. 2025. Disponível em: [GTN Magazine - Using Electricity in Japan](#). Acesso em: 06/10/2025.

VINCE, John. **Quaternions for Computer Graphics**. 2 ed. Londres: Springer, 2021.

APÊNDICE A - Código: Criação de Sinais Simétricos com Harmônicos Simétricos e Cálculo de Desequilíbrio de Tensão pelo PRODIST Módulo 8 e pelo Método da QFT

Figura 14 – Código descrito no Fluxograma

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.signal import find_peaks
4
5 # ----- Configurações -----
6 fs = 2048 # Frequência de Amostragem (Hz)
7 duration = 2 # Duração (s)
8 t = np.arange(0, duration, 1/fs) # Cria o array com passo desejado
9 N = t.size # Número total de amostras
10 f0 = 60.0 # Frequência Fundamental (Hz)
11 rng = np.random.default_rng(0) # Adiciona ruído para simular condições reais
12 # -----
13
14 # ----- Cria a Função de Sinal -----
15 def make_phase_component(fre=0, amplitude=0, phase=0, phase_shift_deg=0):
16     return amplitude * np.sin(2*np.pi*freq*t + np.deg2rad(phase +
17         phase_shift_deg))
18
19 Va = np.zeros_like(t)
20 Vb = np.zeros_like(t)
21 Vc = np.zeros_like(t)
22 # -----
23
24 # ----- Harmônicos e Inter-Harmônicos -----
25 int_harmonics_mult = [1, 2, 3, 5] # Fundamental (60Hz), 2° harmônico (120Hz), 3
26     ° harmônico (180Hz) e 5° harmônico (300Hz)
27 interharmonic_mult = [1.5, 2.2] # 1.5° inter-harmônico (90 Hz) e 2.2° inter-
28     harmônico (132Hz)
29 # -----
```

```

27 # ----- Injeta o Sinal Fundamental, Harmônicos Inteiros, Inter-harmônicos
    e Ruídos -----
28 for mult in int_harmonics_mult:
29     freq = mult * f0
30     amp = 1.0 / mult
31     phase = rng.uniform(0, 360)
32     Va += make_phase_component(freq, amp, phase, 0)
33     Vb += make_phase_component(freq, amp, phase, -120)
34     Vc += make_phase_component(freq, amp, phase, +120)
35
36 for mult in interharmonic_mult:
37     freq = mult * f0
38     amp = 0.3 / mult
39     phase = rng.uniform(0, 360)
40     Va += make_phase_component(freq, amp, phase, 0)
41     Vb += make_phase_component(freq, amp, phase, -120)
42     Vc += make_phase_component(freq, amp, phase, +120)
43
44 for V in [Va, Vb, Vc]:
45     V += 0.01 * np.sin(2*np.pi*1*t + rng.uniform(0, 2*np.pi))
46 noise_std = 0.1 # Ruído égerado quando noise_std > 0
47 Va_noisy = Va + rng.normal(0, noise_std, size=N)
48 Vb_noisy = Vb + rng.normal(0, noise_std, size=N)
49 Vc_noisy = Vc + rng.normal(0, noise_std, size=N)
50 # -----
51
52 # ----- Cria Desequilíbrios para Testar o Detector de Desequilíbrios de
    Tensões -----
53 # O desequilíbrio égerado quando Vx != 1.00
54 Va_noisy *= 1.00
55 Vb_noisy *= 1.00
56 Vc_noisy *= 1.93
57 # -----
58

```

```

59 # ----- Produto, Norma Quaterniônicos e Quatérnio Puro e Unitário
    -----
60 def q_mul(a, b):
61     w1, x1, y1, z1 = a[...],0], a[...],1], a[...],2], a[...],3]
62     w2, x2, y2, z2 = b[...],0], b[...],1], b[...],2], b[...],3]
63     w = w1*w2 - x1*x2 - y1*y2 - z1*z2
64     x = w1*x2 + x1*w2 + y1*z2 - z1*y2
65     y = w1*y2 - x1*z2 + y1*w2 + z1*x2
66     z = w1*z2 + x1*y2 - y1*x2 + z1*w2
67     return np.stack([w, x, y, z], axis=-1)
68
69 def q_norm(a):
70     return np.sqrt(np.sum(a**2, axis=-1))
71
72 mu = np.array([0.0, 1.0, 1.0, 1.0]) # Neste caso: mu = (0 + i + j + k)
73 mu[1:] /= np.linalg.norm(mu[1:]) # Normaliza o quatérnio puro
74 # -----
75
76 # ----- Cria o Sinal Quaterniônico -----
77 q_signal = np.stack([np.zeros_like(Va_noisy), Va_noisy, Vb_noisy, Vc_noisy],
    axis=-1) # q = 0 + Va*i + Vb*j + Vc*k
78 # -----
79
80 # ----- Realiza a QFT Discreta 'Esquerda' Manualmente: Q[k] = sum_n exp(-
    mu * 2pi kn/N) * q[n] -----
81 ks = np.arange(N) # Cria um array para amostras de frequências
82 ns = np.arange(N) # Cria um array para amostras de tempo
83 theta = 2*np.pi/N * (ks[:, None] * ns[None, :]) # Cria uma matriz de frequência
    por tempo
84
85 cos_t = np.cos(theta) # Define cosseno para reescrita polar
86 sin_t = np.sin(theta) # Define seno para reescrita polar
87
88 exp_left = np.empty((N, N, 4)) # Cria uma matriz 3D para acomodar os elementos

```

```

    quaterniônicos
89 exp_left[... ,0] = cos_t # Realiza a Distributiva:  $\exp(-\mu * \theta) = \cos(\theta) +$ 
    (-mu)*sin(theta)
90 exp_left[... ,1] = -mu[1]*sin_t # Realiza a Distributiva
91 exp_left[... ,2] = -mu[2]*sin_t # Realiza a Distributiva
92 exp_left[... ,3] = -mu[3]*sin_t # Realiza a Distributiva
93
94 q_broadcast = q_signal[None, :, :] # Recebe os valores das amostras em q_signal
95 prod_left = q_mul(exp_left, q_broadcast) # Realiza a multiplicação:  $\exp(-\mu * 2$ 
    pi kn/N) * q[n]
96 QFT = prod_left.sum(axis=1) # Realiza a soma de todas as amostras
97 QFT_mag_full = q_norm(QFT) / N # Magnitude bilateral normalizada
98 # -----
99
100 # ----- Extrai as Frequências Positivas da QFT e as Ajusta -----
101 freqs_full = np.fft.fftfreq(N, 1/fs)
102 pos_idx = freqs_full >= 0
103 freqs = freqs_full[pos_idx]
104 QFT_mag_pos = QFT_mag_full[pos_idx].copy()
105
106 if QFT_mag_pos.size > 1:
107     if N % 2 == 0:
108         QFT_mag_pos[1:-1] *= 2.0
109     else:
110         QFT_mag_pos[1:] *= 2.0
111 # -----
112
113 # ----- Plota os Sinais no Tempo -----
114 plt.figure(figsize=(12,5))
115 plt.plot(t[:400], Va_noisy[:400], label='Fase_Va')
116 plt.plot(t[:400], Vb_noisy[:400], label='Fase_Vb')
117 plt.plot(t[:400], Vc_noisy[:400], label='Fase_Vc')
118 plt.title("Sinais_Va, Vb, e Vc no Tempo")
119 plt.xlabel("Tempo (s)")

```

```

120 plt.ylabel("Amplitude")
121 plt.legend()
122 plt.grid()
123 plt.tight_layout()
124 plt.show()
125 # -----
126
127 # ----- Função para Realizar as FFT das Fases -----
128 def plot_fft(sig, label):
129     sig_fft = np.fft.rfft(sig)
130     mag = np.abs(sig_fft) / N
131     if mag.size > 1:
132         if N % 2 == 0:
133             mag[1:-1] *= 2.0
134         else:
135             mag[1:] *= 2.0
136     freqs = np.fft.rfftfreq(N, 1/fs)
137     plt.plot(freqs, mag, label=label)
138
139     peaks, _ = find_peaks(mag, height=0.05 * np.max(mag)) # Encontra e marca no
140     plot os picos das harmônicas
141     for p in peaks:
142         plt.plot(freqs[p], mag[p], 'ro', markersize=4)
143         plt.text(freqs[p], mag[p]*1.05, f'{freqs[p]:.1f} Hz\n{mag[p]:.2f}',
144                 ha='center', va='bottom')
145
146 # -----
147
148 # ----- Plota as Transformadas Rápidas de Fourier (FFT) das Três Fases -----
149
150 for sig, label in zip([Va_noisy, Vb_noisy, Vc_noisy], ['Fase_A', 'Fase_B', '
    Fase_C']):
151     plt.figure(figsize=(12,5))
152     plot_fft(sig, label)
153     plt.xlim(0, 400)

```

```

151     plt.xlabel("Frequência (Hz)")
152     plt.ylabel("Magnitude")
153     plt.title(f"Magnitude da FFT da {label}")
154     plt.legend()
155     plt.grid()
156     plt.tight_layout()
157     plt.show()
158     # -----
159
160     # ----- Plota a Transformada de Fourier Quaterniônica QFT -----
161     plt.figure(figsize=(12,5))
162     plt.plot(freqs, QFT_mag_pos, color='red', label="QFT")
163     plt.xlim(0, 400)
164     plt.xlabel("Frequência (Hz)")
165     plt.ylabel("Magnitude Combinada")
166     plt.title("Transformada de Fourier Quaterniônica 'Esquerda'")
167     plt.legend()
168
169     peaks, _ = find_peaks(QFT_mag_pos, height=0.05*np.max(QFT_mag_pos)) # Encontra
170     e marca no plot os picos das harmônicas
171     for p in peaks:
172         plt.plot(freqs[p], QFT_mag_pos[p], 'ro', markersize=4)
173         plt.text(freqs[p], QFT_mag_pos[p]*1.05,
174                 f'{freqs[p]:.1f} Hz\n{QFT_mag_pos[p]:.2f}',
175                 ha='center', va='bottom')
176
177     plt.grid()
178     plt.tight_layout()
179     plt.show()
180
181     # ----- Calcula os Fasores Fundamentais de Va, Vb e Vc -----
182     def fundamental_phasor(signal, fs, f0):
183         N = len(signal)

```

```

184     fft_vals = np.fft.rfft(signal)
185     freqs = np.fft.rfftfreq(N, 1/fs)
186     idx_f0 = np.argmin(np.abs(freqs - f0))
187     phasor = fft_vals[idx_f0] / (N/2)
188     return phasor
189
190 Va_ph = fundamental_phasor(Va_noisy, fs, f0)
191 Vb_ph = fundamental_phasor(Vb_noisy, fs, f0)
192 Vc_ph = fundamental_phasor(Vc_noisy, fs, f0)
193 # -----
194
195 # ----- Componentes Simétricas -----
196 a = np.exp(1j * 2*np.pi/3) # Operador de sequência positiva
197 V1 = (Va_ph + a * Vb_ph + a**2 * Vc_ph) / 3 # Sequência positiva
198 V2 = (Va_ph + a**2 * Vb_ph + a * Vc_ph) / 3 # Sequência negativa
199 # -----
200
201 # ----- Cálculo do FD% Segundo PRODIST Módulo 8 -----
202 FD_PM8_percent = abs(V2) / abs(V1) * 100
203
204 print("\nCálculo pelo PRODIST Módulo 8:")
205 print(f"V+={abs(V1):.2f}")
206 print(f"V-={abs(V2):.2f}")
207 print(f"\nFD_PM8%={FD_PM8_percent:.2f}%")
208
209 if FD_PM8_percent > 2.0:
210     print("Desequilíbrio acima do permitido. [Método do PRODIST Módulo 8 (FD > 2%)].")
211 else:
212     print("Desequilíbrio dentro do valor permitido. [Método do PRODIST Módulo 8 (FD ≤ 2%)].")
213 # -----
214
215 # ----- Cálculo pelo Método da Transformada de Fourier Quaterniônica QFT

```

```

-----
216 idx_Q_f0 = np.argmin(np.abs(freqs - f0))
217 Q_f0_mag = QFT_mag_pos[idx_Q_f0]
218 FD_QFT_percent = abs((np.sqrt(6) - Q_f0_mag) / Q_f0_mag) * 100
219
220 if FD_QFT_percent > 100.00:
221     FD_QFT_percent = 100
222
223 print("\nCálculo pelo Método da QFT:")
224 print(f"|f0| = {Q_f0_mag:.2f}")
225 print(f"\nFD_QFT% = {FD_QFT_percent:.2f}%")
226
227 if FD_QFT_percent > 2.0:
228     print("Desequilíbrio acima do limite permitido. [Método da QFT (FD > 2%)] ."
229         )
229 else:
230     print("\nDesequilíbrio dentro do limite permitido. [Método da QFT (FD ≤ 2%)] .")
231 # -----
232
233 # ----- Comparação -----
234 print("\n-----Comparação-----")
235 print(f"Produtividade | {FD_PM8_percent:.3f}% |")
236 print(f"QFT | {FD_QFT_percent:.3f}% |")
237 avg_percent = abs(FD_PM8_percent - FD_QFT_percent)
238 print(f"Variação | {avg_percent:.3f}% |")
239 print("-----")
240 # -----

```

Fonte: Autor, 2025.