

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DE MINAS GERAIS - CAMPUS FORMIGA  
BACHARELADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Gabriel Henrique Fonseca

**Aplicação do Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo na  
Simulação de Ondas Eletromagnéticas em Meios com Perfis Variáveis**

Formiga  
2025

Gabriel Henrique Fonseca

**Aplicação do Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo na  
Simulação de Ondas Eletromagnéticas em Meios com Perfis Variáveis**

Trabalho de conclusão de curso  
apresentado ao Curso Bacharelado em  
Engenharia Elétrica do Instituto  
Federal de Minas Gerais - Campus  
Formiga para obtenção do grau de  
bacharel em Engenharia Elétrica.  
Orientador: Prof. Dr. Rafael Vinicius  
Tayette da Nobrega

Formiga  
2025

Fonseca, Gabriel Henrique  
F537a      Aplicação do método das diferenças finitas no domínio do tempo na  
simulação de ondas eletromagnéticas em meios com perfis variáveis. /  
Gabriel Henrique Fonseca – Formiga : IFMG, 2025.  
65 p. :il. color.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Vinicius Tayette da Nobrega  
Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Elétrica) –  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – *Campus*  
Formiga.

1. Eletromagnetismo. 2. FDTD. 3. Simulação. 4. Propagação de ondas. 5. Scilab I.  
Fonseca, Gabriel Henrique. II. Título.

CDD 537

GABRIEL HENRIQUE FONSECA

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS NO DOMÍNIO DO TEMPO  
NA SIMULAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM MEIOS COM PERFIS  
VARIÁVEIS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso Bacharelado em Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais - Campus Formiga como requisito parcial para obtenção de título de bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Vinicius Tayette da Nobrega

Avaliado em 01 de dezembro de 2025.

Nota: 100 pontos.

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Rafael Vinicius Tayette da Nobrega (Orientador)  
Eng. Ma. Cíntia Arantes Silva  
Prof. Dr. Patrick Santos de Oliveira

Formiga, 04 de dezembro de 2025.



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Vinicius Tayette da Nobrega, Professor**, em 04/12/2025, às 19:23, conforme Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.



Documento assinado eletronicamente por **Patrick Santos de Oliveira, Professor**, em 05/12/2025, às 14:18, conforme Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.



Documento assinado eletronicamente por **Cíntia Arantes Silva, Usuário Externo**, em 08/12/2025, às 15:29, conforme Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.



A autenticidade do documento pode ser conferida no site <https://sei.ifmg.edu.br/consultadocs> informando o código verificador **2549574** e o código CRC **3BA51BA9**.

---

---

23211.002004/2025-17
----------------------

2506484v1
-----------

## RESUMO

A modelagem da propagação de ondas eletromagnéticas é fundamental em aplicações de comunicações, energia e diagnóstico por imagem. O Eletromagnetismo Clássico descreve esse fenômeno por meio de equações diferenciais parciais, cuja solução analítica se torna complexa em cenários realistas. Nesse contexto, métodos numéricos, como o Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD), surgem como alternativas eficientes, especialmente com o avanço da capacidade computacional.

Este trabalho tem como objetivo aplicar o método FDTD na simulação da propagação unidimensional de ondas eletromagnéticas. Foi desenvolvido um algoritmo no *software* SciLab capaz de modelar diferentes perfis de condutividade elétrica. A validação foi realizada por meio da comparação com a solução analítica de uma onda plana senoidal em espaço livre.

Adicionalmente, simulações envolvendo pulsos Gaussianos foram conduzidas para avaliar o comportamento da onda em meios com condutividade constante, linear e exponencial. Também foi analisado o impacto da resolução da simulação sobre o tempo de execução do algoritmo.

Os resultados apresentaram excelente concordância com a solução analítica, demonstrando a precisão do método FDTD. Verificou-se ainda que o aumento da resolução acarreta maior custo computacional e que o perfil de condutividade influencia diretamente os fenômenos de reflexão e absorção. Conclui-se que o método FDTD é uma ferramenta robusta e confiável para o estudo numérico da propagação de ondas eletromagnéticas em uma dimensão.

**Palavras-chave:** Eletromagnetismo. FDTD. Simulação. Propagação de Ondas. SciLab.

## ABSTRACT

The modeling of electromagnetic wave propagation is essential in applications related to communications, energy transmission, and medical imaging. Classical Electromagnetism describes this phenomenon through partial differential equations, whose analytical solutions become complex or unfeasible in realistic scenarios. In this context, numerical methods such as the Finite-Difference Time-Domain (FDTD) method arise as efficient alternatives, especially with the advancement of computational capabilities.

This work aims to apply the FDTD method to simulate the one-dimensional propagation of electromagnetic waves. An algorithm was developed in the SciLab software to model different electrical conductivity profiles. Validation was performed by comparing the numerical results with the analytical solution of a sinusoidal plane wave propagating in free space.

Additionally, Gaussian pulse simulations were conducted to evaluate wave behavior in media with constant, linear, and exponential conductivity. The influence of spatial resolution on the algorithm's execution time was also analyzed.

The results showed excellent agreement with the analytical solution, demonstrating the accuracy of the FDTD method. It was also observed that increasing spatial resolution leads to higher computational cost, and that conductivity profiles directly affect reflection and absorption phenomena. It is concluded that the FDTD method is a robust and reliable tool for the numerical study of electromagnetic wave propagation in one dimension.

**Keywords:** Electromagnetism. FDTD. Simulation. Wave Propagation. SciLab.

## Lista de Ilustrações

1	Representação esquemática da aproximação por diferença progressiva. . . .	11
2	Representação esquemática da aproximação por diferença regressiva. . . .	12
3	Representação esquemática da aproximação por diferença central. . . . .	13
4	Divisão do espaço em células de Yee. . . . .	14
5	Arranjo dos componentes dos campos elétrico e magnético na célula de Yee.	15
6	Representação esquemática de células de Yee em uma dimensão . . . . .	16
7	Diagrama de blocos do algoritmo de solução implementado. . . . .	26
8	Equação de atualização para $E_x$ no SciLab. . . . .	27
9	Exemplo da implementação de fonte de campo elétrico. . . . .	27
10	Exemplo de código para FDTD. . . . .	28
11	Representação esquemática da simulação dos meios com e sem perdas. . . .	32
12	Distribuição de condutividade constante em função das células. . . . .	33
13	Distribuição de condutividade linear em função das células. . . . .	34
14	Distribuição exponencial de condutividade em função das células. . . . .	35
15	Exemplo de implementação do cronômetro. . . . .	36
16	Saída do exemplo de implementação do cronômetro. . . . .	36
17	Comparação entre o algoritmo FDTD e o cálculo analítico para o campo elétrico em função da distância, no instante 5000. . . . .	38
18	Curva do erro percentual entre o algoritmo FDTD e o cálculo analítico mostrado na Figura 18. . . . .	39
19	Comparação entre o algoritmo FDTD e o cálculo analítico para o campo elétrico em função da distância, no instante 500. . . . .	40
20	Comparação entre o algoritmo FDTD e o cálculo analítico para o campo elétrico em função da distância, nos instantes 1000, 2000 e 5000. . . . .	41
21	Resultado da simulação do pulso Gaussiano com a condutividade con- stantes para os instantes: (a) 200; (b) 300 e (c) 400. . . . .	42
22	Resultado da simulação do pulso Gaussiano com a condutividade linear para os instantes:(a) 300 e (b) 400. . . . .	44
23	Resultado da simulação do pulso Gaussiano com a condutividade exponen- cial para os instantes:(a) 300 e (b) 400. . . . .	45
24	Tempo de processamento do algoritmo FDTD em função do número de células. . . . .	48

## Lista de Símbolos

$c$ : Velocidade da Luz no Espaço Livre

$\sigma$ : Condutividade Elétrica

$\epsilon$ : Permissividade Elétrica

$\mu$ : Permeabilidade Magnética

$\epsilon_0$ : Permissividade Elétrica do Espaço Livre

$\mu_0$ : Permeabilidade Magnética do Espaço Livre

$\rho$ : Densidade de Cargas

$\omega$ : Frequência Angular

$\vec{J}$ : Densidade de Corrente

$\vec{E}$ : Intensidade de Campo Elétrica

$\vec{D}$ : Deslocamento Elétrico

$\vec{H}$ : Intensidade de Campo Magnético

$\vec{B}$ : Densidade de Campo Magnético

$\Delta h$  : Passo Espacial

$\Delta t$ : Passo Temporal

$N_c$ : Número de Células

$N_t$ : Número de Instantes de Tempo

## Lista de Tabelas

1	Parâmetros físicos e seus respectivos valores utilizados. . . . .	29
2	Tabela de parâmetros de simulação utilizados. . . . .	30
3	Parâmetros de simulação para meios com perdas. . . . .	31
4	Parâmetros físicos para simulação em meios com perdas. . . . .	32
5	Parâmetros utilizados para análise do tempo de execução. . . . .	47

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Relevância do Tema . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	2
1.3	Organização do Trabalho . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>4</b>
2.1	As Equações de Maxwell . . . . .	4
2.1.1	Lei de Gauss . . . . .	4
2.1.2	Lei de Gauss para Campo Magnético . . . . .	5
2.1.3	Lei de Faraday . . . . .	5
2.1.4	Lei de Ampère-Maxwell . . . . .	5
2.2	Absorção de Ondas Eletromagnéticas . . . . .	6
2.2.1	Equações de Maxwell em Meios Com perdas . . . . .	6
2.2.2	Ondas Planas em Meios Homogêneos com Perdas . . . . .	7
2.2.3	Perfis de Condutividade . . . . .	9
2.3	Diferenciação Numérica . . . . .	10
2.3.1	Aproximação por Diferença Progressiva . . . . .	10
2.3.2	Aproximação por Diferença Regressiva . . . . .	11
2.3.3	Aproximação por Diferença Central . . . . .	12
2.4	O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD) . . . . .	13
2.4.1	Método de Yee . . . . .	13
2.4.2	A Célula de Yee . . . . .	14
2.4.3	Equações de Atualização para Caso 1D . . . . .	16
2.4.4	Critério de Estabilidade . . . . .	18
2.4.5	Dispersão Numérica . . . . .	20
2.4.6	Condições de Fronteira Absorvente . . . . .	23
2.5	<i>Software</i> SciLab . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Metodologia Desenvolvida</b>	<b>26</b>
3.1	Estruturação do Algoritmo de Implementado . . . . .	26
3.2	Simulação para Meio sem Perdas e e Validação do Algoritmo . . . . .	28
3.3	Simulação para Meios com Perfil de Condutividade Variáveis . . . . .	30
3.4	Simulação Para Meio com Perfil de Condutividade Constante . . . . .	33
3.5	Simulação para Meio com Perfil de Condutividade Linear . . . . .	33
3.6	Simulação para Meio com Perfil de Condutividade Exponencial . . . . .	34
3.7	Análise do Tempo de Processamento . . . . .	35

<b>4</b>	<b>Resultados e Discussão</b>	<b>38</b>
4.1	Simulação em Meio sem Perdas . . . . .	38
4.2	Resultados da Simulação em Perfil de Condutividade Constante . . . . .	41
4.3	Resultados da Simulação em Perfil de Condutividade Linear . . . . .	43
4.4	Resultados da Simulação em Perfil de Condutividade Exponencial . . . . .	45
4.5	Análise de Tempo de Processamento . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>50</b>
5.1	Estudos Futuros . . . . .	50

# 1 Introdução

## 1.1 Relevância do Tema

A propagação de ondas eletromagnéticas é utilizada em diversas tecnologias, tais como comunicação, transmissão de energia e diagnóstico médico. As ondas eletromagnéticas são influenciadas pelos meios em que se propagam; fatores como condutividade elétrica, permissividade elétrica, permeabilidade magnética e frequência impactam no comportamento da onda. Como abordado em Yang (2024), em aplicações práticas, os obstáculos que as ondas eletromagnéticas são expostas são compostos por materiais com propriedades variadas, como as paredes e móveis de uma residência onde o sinal Wi-Fi se propaga, ou as montanhas e prédios que impactam na transmissão de sinais de rádio. O Eletromagnetismo Clássico permite a solução analítica para ondas se propagando em meios com características variáveis. No entanto, essas soluções são aplicáveis mais facilmente em materiais mais simples, com parâmetros invariantes, tais como a permissividade elétrica, a permeabilidade magnética e a condutividade elétrica. Para materiais complexos, os métodos numéricos tornam-se uma alternativa mais viável. Destaca-se, portanto, a importância do estudo de métodos de solução que permitam solucionar problemas envolvendo ondas eletromagnéticas em meios com parâmetros variantes.

Com o avanço computacional, métodos numéricos mais avançados foram estabelecidos. De acordo com Taflove e Hagness (2005), o FDTD (*Finite Differences Time Domain*), ou em português, Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo, foi a primeira técnica desenvolvida para solucionar este tipo de problema. O método FDTD é proposto em Yee (1966), onde o autor implementou a solução das equações de Maxwell envolvendo rotacionais no domínio do tempo, em um tipo de malha. O formalismo é baseado na diferenciação numérica e em um algoritmo que avança no tempo. Eventualmente, o método FDTD foi consolidado por outros autores. Em Taflove e Brodwin (1957), foram obtidos critérios corretos que garantem a estabilidade da solução. Holland (1983) aplicou o método FDTD em problemas com três dimensões envolvendo pulsos eletromagnéticos. Bérenger (1994) desenvolveu a técnica conhecida como *Perfectly Matched Layer* (PML). Este artifício cria uma região capaz de absorver ondas eletromagnéticas sem reflexões em duas dimensões, usada em simulações de propagação e espalhamento com intuito de modelar o espaço livre. Taflove e Hagness (2005) apresentam um trabalho completo reunindo os principais tópicos sobre FDTD. Posteriormente, baseado em (TAFLOVE; HAGNESS, 2005), Elsherbeni (2015) descreve o método FDTD detalhadamente e apresenta o desenvolvimento de uma aplicação em MATLAB capaz de realizar simulações de FDTD.

Diante do avanço do FDTD, diversas aplicações surgem em problemas reais. Em Hagness e Taflove (1998), foi introduzida uma modelagem de uma matriz de antenas usando FDTD para detecção do estágio inicial do câncer de mama. Alsunaidi (2008) apresenta a modelagem FDTD para uma antena de microfita com substrato de ferrita. Silva (2019)

desenvolve uma ferramenta computacional para aplicação do método FDTD para determinar o comportamento dinâmico de um sistema de aterramento elétrico. Em Choroszucho *et al.* (2024) foi realizado um estudo utilizando o método FDTD para analisar a propagação de ondas eletromagnéticas em sistemas compostos por concreto e concreto armado, demonstrando como esses materiais influenciam na atenuação e reflexão do sinal

A partir dos trabalhos relacionados apresentados, somados a possibilidade de aplicação da FDTD em diversas tecnologias, motivaram e justificaram o desenvolvimento desta monografia de final de curso. Como abordado em Griffiths (2013), materiais com condutividade elétrica não desprezível, apresentam a absorção e atenuação das ondas eletromagnéticas, bem como a reflexão ao incidirem em uma superfície condutora. Neste contexto, este trabalho propõe uma análise do método FDTD por meio da implementação de um algoritmo que permite a simulação de ondas eletromagnéticas em uma dimensão, considerando materiais com perfis variáveis de condutividade elétrica, bem como uma análise do impacto da resolução da simulação sobre o tempo de execução do algoritmo.

## 1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo geral analisar o comportamento de ondas eletromagnéticas em função da condutividade elétrica dos materiais, por meio da implementação e execução de simulações computacionais através de um algoritmo FDTD utilizando o *software* SciLab.

Para o alcance do objetivo geral, estabelecem-se os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver um algoritmo em SciLab capaz de simular a propagação de ondas eletromagnéticas em uma dimensão, avaliando sua precisão por meio da comparação com resultados analíticos obtidos em um cenário de referência;
- Realizar simulações considerando perfis espaciais de condutividade elétrica distintos, sendo esses: constante, linear e exponencial, de modo a investigar a influência de cada configuração no comportamento das ondas eletromagnéticas;
- Analisar o impacto do aumento da resolução da simulação sobre o tempo de execução do algoritmo.

## 1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho é organizado em cinco capítulos, incluindo esta introdução. No capítulo 2, é apresentada a fundamentação teórica necessária para o entendimento do trabalho, tais como as equações de Maxwell, o método de Yee e conteúdos auxiliares, como a derivada numérica.

O capítulo 3 exibe o desenvolvimento do trabalho, abordando tópicos como a estruturação do algoritmo desenvolvido e a configuração das simulações a serem feitas. No capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos para cada simulação demonstrada no capítulo 3. Este texto é finalizado no capítulo 5, onde são apresentadas as conclusões obtidas, bem como sugestões para trabalhos futuros.

## 2 Fundamentação Teórica

Neste capítulo são apresentados os conceitos necessários para a compreensão do presente trabalho.

### 2.1 As Equações de Maxwell

As equações de Maxwell fornecem uma descrição completa dos fenômenos eletromagnéticos e sustentam todos os dispositivos modernos de tecnologia da informação e comunicação (TURNBULL, 2013). De acordo com Sadiku (2016), Considerando um meio isotrópico, os vetores de intensidade e densidade dos campos elétricos e magnéticos são relacionados por meio da permissividade elétrica  $\epsilon$  e da permeabilidade magnética  $\mu$  como segue:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (2.1)$$

$$\vec{H} = \mu \vec{B}, \quad (2.2)$$

onde  $\vec{D}$  é o vetor de deslocamento elétrico,  $\vec{E}$  é a intensidade do campo elétrico,  $\vec{H}$  é a intensidade do campo magnético e  $\vec{B}$  é a densidade do fluxo magnético.

#### 2.1.1 Lei de Gauss

A primeira das equações de Maxwell é conhecida como Lei de Gauss ou Lei do Divergente. De acordo com Griffiths (2013), a Lei de Gauss na forma diferencial é dada por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (2.3)$$

onde  $\rho$  é a densidade de cargas elétricas.

A equação (2.3) relaciona o campo elétrico com a carga que o origina. A forma integral da Lei de Gauss pode ser obtida como (GRIFFITHS, 2013):

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (2.4)$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon} dV, \quad (2.5)$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{Q_{enc}}{\epsilon}. \quad (2.6)$$

Aplicando o Teorema de Green, da equação (2.6), obtém-se:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\hat{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon}. \quad (2.7)$$

A equação (2.7) é a Lei de Gauss na forma integral, que permite uma melhor interpretação física. O termo  $Q_{enc}$  consiste na carga elétrica total envolvida por uma superfície fechada  $s$ . Enquanto a integral de superfície consiste no fluxo elétrico que atravessa a superfície fechada que envolve as cargas.

### 2.1.2 Lei de Gauss para Campo Magnético

A segunda equação de Maxwell é a versão da Lei de Gauss para o campo magnético, que, de acordo com Griffiths (2013), tem sua forma diferencial expressa por:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.8)$$

Utilizando o Teorema de Green, como no caso do campo elétrico, pode-se expressar a equação (2.8) na forma integral:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\hat{s} = 0. \quad (2.9)$$

A equação (2.9) demonstra que as linhas de campo magnético são fechadas, ou seja, em uma superfície fechada, o fluxo magnético é sempre nulo. Dessa forma, não existem monopolos magnéticos, de acordo com o Eletromagnetismo Clássico.

### 2.1.3 Lei de Faraday

Em 1831, o físico e químico britânico Michael Faraday descreveu uma série de experimentos que, mais tarde, levariam à formulação da lei hoje conhecida como lei de Faraday. A lei de Faraday demonstra que um campo elétrico variável no tempo induz campos magnéticos. Como abordado em Griffiths (2013), na forma diferencial, a lei de Faraday é dada por:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.10)$$

A Lei de Faraday tem um significado muito importante para a eletrodinâmica, pois mostra que campos elétricos podem ser gerados não apenas por cargas elétricas, mas também por campos magnéticos variáveis no tempo.

### 2.1.4 Lei de Ampère-Maxwell

A quarta das equações de Maxwell surge da Lei de Ampère, que relaciona o campo magnético com as correntes elétricas que o geram. Para correntes estacionárias, o divergente de  $\vec{J}$  é nulo, mas, evidentemente, além da Magnetostática, a lei de Ampère não pode estar correta (GRIFFITHS, 2013). Maxwell resolveu este problema acrescentando o termo que o mesmo chamou de *Corrente de Deslocamento*, que apesar do nome, não tem relação com correntes elétricas reais, mas sim com a capacidade de campos magnéticos ser gerado

por variações temporais do campos elétricos. Após a correção, a lei de Ampère-Maxwell é expressa como:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.11)$$

## 2.2 Absorção de Ondas Eletromagnéticas

### 2.2.1 Equações de Maxwell em Meios Com perdas

Meios materiais com perdas são meios onde o valor da condutividade elétrica ( $\sigma$ ) não pode ser desprezada. Considerando um meio desprovido de cargas e correntes elétricas, as equações de Maxwell tornam-se:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{J}_c. \quad (2.15)$$

É importante destacar que o termo  $\vec{J}_c$  em (2.15) é referente a densidade de corrente que será induzida no material por meio da interferência de campos elétricos externos, e não representa corrente elétrica presente no material, pois o meio em questão é assumido como neutro. Em outras palavras,  $\vec{J}_c$  é a densidade de corrente gerada por meio da Lei de Ohm, que é dada por:

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E}. \quad (2.16)$$

onde  $\sigma$  é a condutividade elétrica do meio.

Substituindo a equação (2.16) em (2.15), determina-se que:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \sigma \vec{E}. \quad (2.17)$$

Como demonstrado em Griffiths (2013), ao aplicar o rotacional em ambos os lados das equações(2.14) e (2.17), obtêm-se as equações de onda. Assim:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.18)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}), \quad (2.19)$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}). \quad (2.20)$$

A equação (2.20) será reescrita como:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.21)$$

Agora, um procedimento semelhante pode ser feito para o campo magnético e, desta forma, obtém-se:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.22)$$

Portanto, as equações (2.21) e (2.22) são equações diferenciais parciais de segunda ordem, que admitem soluções em ondas planas.

### 2.2.2 Ondas Planas em Meios Homogêneos com Perdas

Em materiais condutores, as ondas eletromagnéticas são atenuadas, uma vez que a presença de campos elétricos movimentam as cargas livres dos materiais condutores, gerando um campo elétrico oposto que, somado ao campo original, resulta em uma atenuação da amplitude. Este comportamento é descrito matematicamente por meio das soluções das equações de onda em (2.22) e (2.21).

Considere uma onda plana monocromática senoidal propagando-se em um meio com condutividade constante. De acordo com Griffiths (2013), para a equação (2.21), a solução para  $\vec{E}$  é dada por:

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{j(\vec{r} \cdot \vec{k} - \omega t)}, \quad (2.23)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular,  $\vec{r}$  é o vetor posição e  $\vec{k}$  é o número de onda complexo.

Na equação (2.23), o til em cima dos termos indica que se trata de um número complexo. Sendo assim, o campo elétrico está sendo representado no domínio da frequência, enquanto o campo elétrico real é dado por:

$$\vec{E} = \text{Re}\{\tilde{\vec{E}}\}. \quad (2.24)$$

O numero de onda  $\tilde{k}$  pode ser determinado substituindo a equação (2.23) em (2.21). Desta forma, mostra-se que a equação (2.21) admite solução em ondas planas. Para este procedimento, será considerado que o campo elétrico está polarizado na direção  $x$ , ou seja,  $\tilde{\vec{E}}$  possui apenas componentes na coordenada  $x$  e se propaga ao longo de  $z$ . Assim, a equação (2.23) torna-se:

$$\tilde{E}_x(z, t) = \tilde{E}_{0x} e^{j(\tilde{k}z - \omega t)}, \quad (2.25)$$

com:

$$\tilde{E}_{0x} = E_{0x} e^{j\delta_E}, \quad (2.26)$$

onde  $\delta_E$  é o ângulo de fase do campo elétrico.

Como abordado em Griffiths (2013), substituindo a equação (2.25) em (2.21), e efetuando algumas operações, é possível mostrar que:

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + j\mu\sigma\omega, \quad (2.27)$$

e também:

$$\tilde{k} = \alpha + j\beta, \quad (2.28)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}, \quad (2.29)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}. \quad (2.30)$$

Destaca-se que, ao propor a solução na forma descrita na equação 2.25, foi assumido que o meio possui condutividade homogênea, ou seja  $\sigma = \text{constante}$ . Caso contrário, a equação (2.21) se torna uma equação diferencial com coeficientes variáveis, o que dificulta muito uma solução analítica. Em alguns casos, não sendo possível encontrar uma solução fechada.

Por fim, substituindo  $\tilde{k}$  pela forma descrita em (2.29) e (2.30), na equação (2.25), obtém-se:

$$\tilde{E}_x(z, t) = \tilde{E}_0 e^{-\beta z} e^{j(\alpha z - \omega t)}. \quad (2.31)$$

O mesmo procedimento pode ser feito para o campo magnético:

$$\tilde{B}_x(z, t) = \tilde{B}_0 e^{-\beta z} e^{j(\alpha z - \omega t)}. \quad (2.32)$$

Com isso, os campos reais, são dados por:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-\beta z} \cos(\alpha z - \omega t + \delta_E) \hat{x}, \quad (2.33)$$

$$\vec{B}(z, t) = B_0 e^{-\beta z} \cos(\alpha z - \omega t + \delta_B) \hat{y}. \quad (2.34)$$

As equações (2.33) e (2.34) são funções senoidais amortecidas. Este comportamento concorda com a constatação inicial de que os campos são atenuados conforme adentram em um material condutor.

### 2.2.3 Perfis de Condutividade

As soluções apresentadas pelas equações (2.33) e (2.34) referem-se a materiais com um perfil constante de condutividade, ou seja, a condutividade elétrica não varia espacialmente dentro do material. Como a discussão é limitada a sistemas com apenas uma variável espacial, sendo esta escolhida como a direção de propagação da onda eletromagnética, um material com condutividade elétrica constante é aquele onde:

$$\sigma(z) = \sigma_{max} = \text{constante}. \quad (2.35)$$

Para perfis de condutividade que variam espacialmente, soluções numéricas tornam-se interessantes devido ao aumento da complexidade. Assim, dois perfis de distribuição de condutividade são apresentados a seguir:

1. Distribuição Linear:

$$\sigma(z) = a(z - z_0) + \sigma(z_0) .$$

2. Distribuição Exponencial:

$$\sigma(z) = \sigma(z_0) e^{a(z-z_0)} .$$

onde as constantes  $a$ ,  $z_0$  e  $\sigma(z_0)$  são valores a serem determinados de acordo com o perfil de condutividade de interesse.

Estes perfis de condutividade podem ser considerados na solução das equações (2.21) e (2.22), tornando o problema consideravelmente mais difícil de ser solucionado analiticamente. Os perfis de condutividade também podem ser implementados no algoritmo FDTD para solução numérica, o que é realizado neste trabalho.

## 2.3 Diferenciação Numérica

As equações diferenciais parciais (EDPs) são, em geral, mais complexas do que as equações diferenciais ordinárias, por envolverem um número maior de variáveis raramente soluções exatas podem ser obtidas (FRANCO, 2006).

Como demais equações diferenciais parciais, as equações de Maxwell são difíceis de serem resolvidas analiticamente em problemas que não possuem uma geometria favorável; infelizmente, problemas deste tipo são a maioria dos casos.

O método das diferenças finitas é um método numérico para a resolução de equações diferenciais. Utilizando a diferenciação numérica, pode-se reescrever EDPs de modo a permitir uma solução por métodos iterativos. As derivadas de primeira e segunda ordem de uma função são aproximadas por diferenciação progressiva, regressiva ou central. Tais métodos de diferenciação são apresentados a seguir.

### 2.3.1 Aproximação por Diferença Progressiva

Considerando uma função discreta cujo domínio seja  $D = x_0 + x_1 + \dots + x_n$ . A expansão em série de Taylor, centrada no ponto  $x_i$  para  $x_{i+1}$  é dada por:

$$f[x_{i+1}] = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{f^{(i)}[x_i]}{i!} (x_{i+1} - x_i)^i \right],$$
$$f[x_{i+1}] = f[x_i] + f'[x_i](x_{i+1} - x_i) + [\dots].$$

Isolando  $f'[x_i]$  determina-se que:

$$f'[x_i] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} + O[x_{i+1} - x_i], \quad (2.36)$$

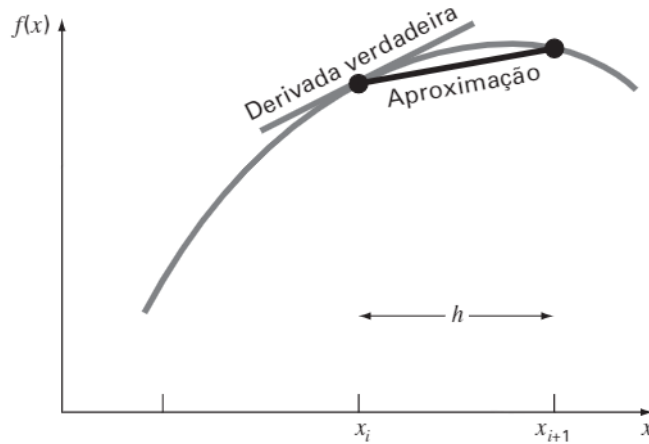
onde o termo  $O[x_{i+1} - x_i]$  representa o erro devido à não consideração dos termos de segunda ordem em diante.

Fazendo  $h = x_{i+1} - x_i$ , a equação (2.36) pode ser reescrita como:

$$f'[x_i] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{h} + O[x_{i+1} - x_i] = \frac{\Delta f_i}{h} + O[h], \quad (2.37)$$

onde  $\Delta f_i$  é conhecida como primeira diferença progressiva e  $h$  é chamado de tamanho do passo, isto é, o comprimento do intervalo no qual a aproximação é feita (CHAPRA, 2013).

Figura 1 – Representação esquemática da aproximação por diferença progressiva.



Fonte: Figura extraída de (CHAPRA; CANALE, 2013)

Na Figura 1, nota-se que, na diferença progressiva, a derivada é aproximada utilizando um ponto  $x_i$  e outro ponto adiante  $x_{i+1}$ , onde a distância entre esses pontos é  $h$ .

### 2.3.2 Aproximação por Diferença Regressiva

Seguindo o raciocínio semelhante ao caso progressivo, e considerando uma função discreta cujo domínio seja  $D = x_0 + x_1 + \dots + x_n$ . A expansão em série de Taylor, centrada no ponto  $x_i$  para  $x_{i-1}$  será expressa como:

$$f[x_{i-1}] = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{f^i[x_i]}{i!} (x_{i-1} - x_i)^i \right],$$

$$f[x_{i-1}] = f[x_i] + f'[x_i](x_{i-1} - x_i) + [\dots],$$

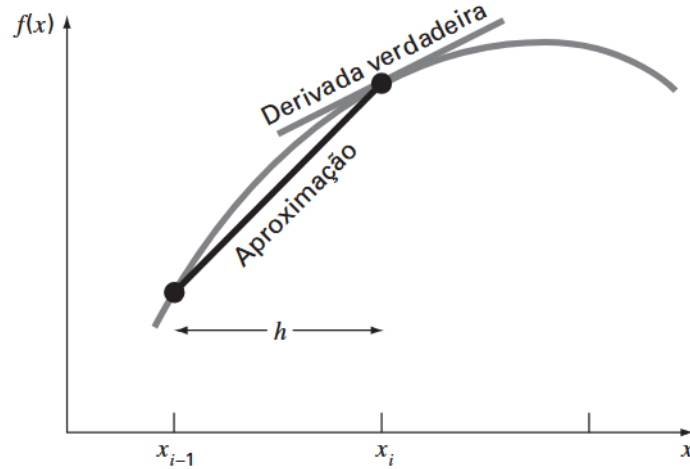
Isolando o termo  $f'[x_i]$ , obtém-se:

$$f'[x_i] = \frac{f[x_i] - f[x_{i-1}]}{x_i - x_{i-1}} + O[x_i - x_{i-1}]. \quad (2.38)$$

Fazendo  $h = x_i - x_{i-1}$ , a equação (2.38) torna-se:

$$f'[x_i] = \frac{\Delta f_i}{h} + O[h]. \quad (2.39)$$

Figura 2 – Representação esquemática da aproximação por diferença regressiva.



Fonte: Figura extraída de (CHAPRA; CANALE, 2013)

Na Figura 2, nota-se que, na diferença regressiva, a derivada é aproximada utilizando um ponto  $x_i$  e outro ponto recuado  $x_{i-1}$ , onde a distância entre esses pontos é  $h$ .

### 2.3.3 Aproximação por Diferença Central

Outra forma de aproximar a primeira derivada, é a diferença centrada. Subtraindo a (2.38) da (2.37), obtém-se que:

$$f[x_{i+1}] = f[x_{i-1}] + 2f'[x_i]h + \frac{2f'''[x_i]}{3!}h^3 + [\dots].$$

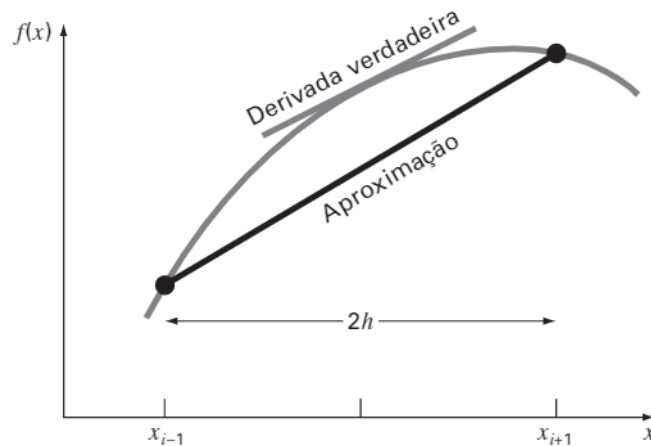
Isolando  $f'[x_i]$ , determina-se que:

$$f'[x_i] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_{i-1}]}{2h} - \frac{f'''[x_i]}{6}h^2 - [\dots].$$

$$f'[x_i] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_{i-1}]}{2h} - O[h^2]. \quad (2.40)$$

A equação (2.40) é a aproximação da derivada primeira de  $f[x_i]$ , por meio da diferença central. O termo  $O[h^2]$  indica que o erro obtido é da ordem de  $h^2$ , portanto a aproximação utilizando diferença central é mais precisa que as outras apresentadas anteriormente.

Figura 3 – Representação esquemática da aproximação por diferença central.



Fonte: Figura extraída de (CHAPRA; CANALE, 2013)

Na Figura 3, nota-se que a aproximação da derivada no ponto  $x_i$  por meio da diferença central é feita utilizando dois pontos,  $x_{i+1}$  e  $x_{i-1}$ , onde a distancia entre eles é  $2h$ .

## 2.4 O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD)

### 2.4.1 Método de Yee

Em 1966, Kane S.Yee publicou um artigo que descreve um método de solução numérica para as equações de Maxwell utilizando derivadas numéricas, este método ficou conhecido por Método de Yee ou método das diferenças finitas no domínio do tempo (TAFLOVE; HAGNESS, 2005). Yee desenvolveu uma configuração de campo elétrico e magnético no espaço de modo a descrever um elemento discreto chamado de célula de Yee. O Método de Yee é formulado a partir das equações (2.10) e (2.11), são equações vetoriais que, de acordo com Elsherbeni (2015), podem ser expressas separadamente em suas componentes como segue:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_x} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_{ex} E_x - J_{ix} \right), \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_y} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_{ey} E_y - J_{iy} \right), \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_z} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_{ez} E_z - J_{iz} \right), \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu_x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma_{mx} H_x - M_{ix} \right), \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_y} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma_{my} H_y - M_{iy} \right), \quad (2.45)$$

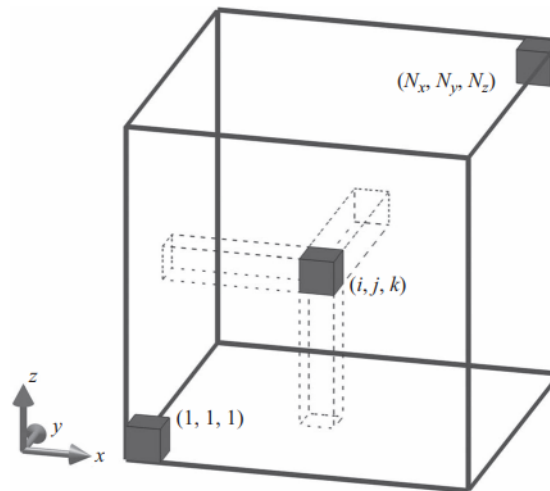
$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu_z} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_{mz} H_z - M_{iz} \right). \quad (2.46)$$

As equações de (2.41) a (2.46) acrescentam os termos  $M_i$  e  $\sigma_m$ , que são respectivamente a densidade de corrente magnética e a condutividade de cargas magnéticas. Estes termos no meio material são nulos, devido à não existência de monopolos magnéticos. No entanto, eles podem ser úteis como ferramentas matemáticas que podem ser necessárias para definir certos objetos. Neste trabalho, por convenção, os termos  $M_i$  e  $\sigma_m$  são considerados nulos.

#### 2.4.2 A Célula de Yee

No método de Yee, o espaço é dividido em vários pedaços cúbicos denominados células de Yee. Cada célula é indexada pelo seu vértice inferior esquerdo, como mostrado na figura 4.

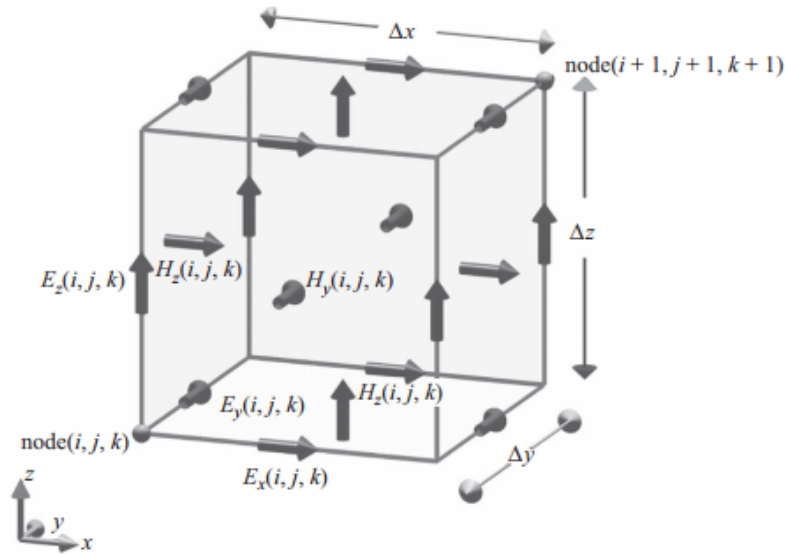
Figura 4 – Divisão do espaço em células de Yee.



Fonte: Figura extraída de (ELSHARBENI, 2015).

Na Figura 4 é ilustrado como o espaço é discretizado em  $N$  células, que são indexadas de modo que a primeira célula tenha índice  $(1, 1, 1)$ . Cada célula possui componentes de campos elétrico e magnético, de modo que os componentes do campo magnético estão sempre na direção perpendicular às faces do cubo, enquanto os componentes do campo elétrico são paralelos às arestas da célula (ELSHERBENI, 2015).

Figura 5 – Arranjo dos componentes dos campos elétrico e magnético na célula de Yee.



Fonte: Figura extraída de (ELSHERBENI, 2015).

Na Figura 5 é mostrada a disposição dos componentes dos campos elétrico e magnético na célula de Yee. Esta configuração não é escolhida por acaso, mas sim para melhor satisfazer as equações (2.10) e (2.11). Isto pode ser entendido ao tomar o campo  $H_y$  por exemplo, o mesmo está sendo circulado pelos campos elétricos  $E_x$  e  $E_z$ , o que é esperado, considerando a equação (2.43).

Dessa forma, o índice  $(i, j, k)$  representa o campo em questão para a célula com este índice. Por exemplo,  $E_x(1, 1, 1)$  indica o campo elétrico na direção  $x$  na célula com índice  $(1, 1, 1)$ .

As equações de Maxwell são equações dependentes do tempo, para isto, é necessário uma notação que represente os campos em suas coordenadas  $(i, j, k)$ , e no instante de tempo  $n$ , para isto será utilizada a seguinte notação:

$$F(x, y, z, t) = F^{n\Delta t}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z). \quad (2.47)$$

Em termos apenas do domínio discreto das células de Yee, obtém-se:

$$F(i, j, k, n) = F^n(i, j, k). \quad (2.48)$$

### 2.4.3 Equações de Atualização para Caso 1D

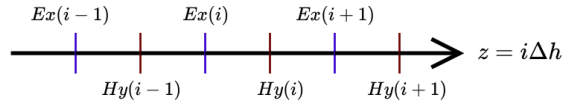
O algoritmo FDTD calcula os campos elétricos e magnéticos em instantes de tempo discretos, no entanto o campo elétrico e magnético não são amostrados nos mesmos instantes de tempo (ELSHERBENI, 2015). De fato, o campo elétrico é amostrado em instantes de tempo inteiros ( $0\Delta t, 1\Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$ ), enquanto o campo magnético é calculado em instantes meio-inteiros, ( $[0 + 1/2]\Delta t, [1 + 1/2]\Delta t, [2 + 1/2]\Delta t, \dots, [n + 1/2]\Delta t$ ). Isto deve-se ao fato do campo elétrico variante no tempo gerar um campo magnético e vice-versa e assim, a propagação dos campos é modelada de modo que, no instante de tempo  $n$ , um campo elétrico variável cria um campo magnético no instante de tempo  $n + 1/2$ .

Tendo em mente a diferença de amostragem entre os campos elétrico e magnético, determina-se as equações de atualização, que são equações que calculam os campos em todo o espaço para cada instante de tempo, de modo que os campos no instante anterior geram um campo no instante de tempo presente, atualizando a configuração de campo a fim de obedecer a propagação de ondas eletromagnéticas estabelecidas pelas equações de Maxwell.

As equações (2.41) a (2.46) são utilizadas para descrever problemas em três dimensões espaciais. No entanto, aborda-se neste trabalho apenas uma dimensão espacial.

Assim, considerando uma onda plana, propagando-se na direção  $z$ , cujo campo elétrico está polarizado na direção  $x$ . Pela lei de Ampere-Maxwell, deve existir um campo magnético associado na direção  $y$ . Sendo assim, os campos de interesse são  $E_x$  e  $H_y$ , e ambos variam espacialmente apenas com  $z$ . Desta forma, a célula de Yee deixa de ser um cubo e passa a ser apenas um segmento, como exibido na Figura 6.

Figura 6 – Representação esquemática de células de Yee em uma dimensão



Fonte: Autor, 2025

Agora, ao observando as equações (2.41) a (2.46), aplicando as restrições em que apenas os campos  $E_x$  e  $H_y$  existem e variam espacialmente ao longo de  $z$ , as equações tornam-se:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon(z)} \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma(z)E_x - J_x \right), \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu(z)} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} \right). \quad (2.50)$$

Na sequência, aplicando a diferenciação finita central em ambos os lados da (2.49), calcula-se:

$$\frac{E_x^{n+1}(i) - E_x^n(i)}{\Delta t} = -\frac{1}{\epsilon(i)} \left( \frac{Hy^{n+\frac{1}{2}}(i-1) - Hy^{n+\frac{1}{2}}(i)}{\Delta h} + \alpha(i)E_x^{n+\frac{1}{2}} + J_x^{n+1/2}(i) \right),$$

onde  $\Delta h$  é o valor do comprimento de cada elemento da linha, que é chamado de passo espacial, enquanto  $\Delta t$  é o valor do intervalo de tempo utilizado na solução representa o passo temporal.

Entretanto, os campos elétricos não são amostrados em  $n = 1 + 1/2$ , com isso, é considerada a média aritmética da seguinte maneira:

$$E_x(i)^{n+1/2} = \frac{E_x(i)^{n+1} + E_x(i)^n}{2}.$$

De acordo com Elsherbeni (2015), substituindo e resolvendo para  $E_x^{n+1}(i)$ , obtém-se:

$$E_x^{n+1}(i) = C_{exe}(i)E_x^n + C_{exhy}(i)[H_y^{n+1/2}(i) - H_y^{n+1/2}(i-1)] + C_{exj}(i)J_x^{n+1/2}, \quad (2.51)$$

onde:

$$C_{exe}(i) = \frac{2\epsilon(i) - \sigma(i)\Delta t}{2\epsilon(i) + \sigma(i)\Delta t}, \quad (2.52)$$

$$C_{exhy}(i) = -\frac{2\Delta t}{\Delta h(2\epsilon(i) + \sigma(i)\Delta t)}, \quad (2.53)$$

$$C_{exj}(i) = -\frac{2\Delta t}{2\epsilon(i) + \sigma(i)\Delta t}. \quad (2.54)$$

A equação (2.51) é chamada de equação de atualização para o campo elétrico. Ela expressa o campo elétrico em um instante de tempo no futuro, relacionando-o com os campos do instante de tempo atual, efetivamente formando um algoritmo que evolui no tempo.

De forma similar, realizando o mesmo procedimento para o campo magnético, sua respectiva equação de atualização será dada por:

$$H_y^{n+1/2} = H_y^{n-1/2}(i) + C_{hzex}(i)[E_x^n(i+1) - E_x^n(i)], \quad (2.55)$$

onde:

$$C_{hyex}(i) = -\frac{\Delta t}{\mu(i)\Delta h}. \quad (2.56)$$

Diante disto, nota-se que um algoritmo pode ser implementado de modo a atualizar o campo elétrico, e em seguida o campo magnético, para cada instante de tempo, rodando um laço de repetição que realiza esta atualização até atingir o tempo desejado de simulação.

#### 2.4.4 Critério de Estabilidade

Na subseção anterior foram introduzidos os conceitos de passo espacial e o passo temporal. Assim, espera-se que, quanto menor o valor dos intervalos escolhidos, maior será a resolução da linha e a solução será mais exata. Isto, apesar de ser verdade, não é toda a informação necessária para a escolha destes valores.

O valor do passo espacial  $\Delta h$  é comumente padronizado em 20 vezes menor que o comprimento da onda (ELSHERBENI, 2015). Este é um bom estimador para determinar  $\Delta h$  em simulações em meios sem perdas. Em meios com perdas, outro fator deve ser levado em consideração, a profundidade de penetração. De acordo com Griffiths (2013), a profundidade de penetração ( $d$ ), é a distância necessária que uma onda deve percorrer através de um material para que sua amplitude seja atenuada em aproximadamente um terço do valor inicial. A importância deste parâmetro é evidente, uma vez que um passo espacial maior que a profundidade de penetração seja escolhido, não será possível descrever corretamente a atenuação da onda, levando a um resultado errôneo. Diante disto, é preciso garantir que  $\Delta h \ll d$ .

Tendo definido o valor de  $\Delta h$ , resta definir o valor de  $\Delta t$ , este valor é um pouco mais complicado. A seguir, será mostrado que, existe um valor máximo para  $\Delta t$ . E caso este valor não seja respeitado, a simulação tende a aumentar o erro a cada iteração, tendendo ao infinito e corrompendo o resultado.

Como apresentado em Elsherbeni (2015), para entender o conceito de estabilidade, considere a equação de onda:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (2.57)$$

Se  $u_0(x)$  é a condição inicial em  $t = 0$ , a equação pode ser solucionada analiticamente, considerando:

$$u(x, t) = u_0(x - t). \quad (2.58)$$

Em seguida, o domínio é discretizado na forma:

$$x[i] = i\Delta h, \quad (2.59)$$

$$t[n] = n\Delta t, \quad (2.60)$$

$$u^n(i) = u(x[i], t[n]). \quad (2.61)$$

Aplicando a diferença finita central, e resolvendo para  $u^{n+1}(i)$ , encontra-se:

$$u^{n+1}(i) = u^{n-1}(i) + \lambda(u^n(i+1) - u^n(i-1)) \quad (2.62)$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta h} \quad (2.63)$$

Agora, para ilustrar a propagação do erro, considere que:

$$u^n(i) = \text{erro}, \quad (2.64)$$

$$u^{n-1}(i) = 0. \quad (2.65)$$

Enquanto os demais valores de  $u^n$  ( $\dots, i-2, i-1, i+1, i+2, \dots$ ) são nulos. Desta forma, obtém-se que:

$$u^{n+1}(i) = u^{n-1}(i) + \lambda[u^n(i+1) - u^n(i-1)] = 0, \quad (2.66)$$

E, portanto, têm-se o seguinte sistema de equações:

$$u^{n+1}(i-1) = u^{n-1}(i-1) + \lambda[u^n(i) - u^n(i-2)], \quad (2.67)$$

$$u^{n+1}(i-1) = 0 + \lambda[\text{erro} + 0], \quad (2.68)$$

$$u^{n+1}(i-1) = \lambda \text{erro} \quad (2.69)$$

Note que, na equação (2.69), é mostrado que o valor do erro foi multiplicado por  $\lambda$  após uma iteração. Dessa forma, existirão três possibilidades:

1.  $\lambda > 1$ : o erro será multiplicado e aumentará a cada iteração.
2.  $\lambda = 1$ : o erro se manterá o mesmo e se propagará sem acréscimos

3.  $\lambda < 1$ : o erro será reduzido a cada iteração.

Como discutido em Taflove e Hagness (2005), o aumento consecutivo do erro irá corromper completamente os resultados. Portanto, é necessário escolher  $\Delta t$  de modo que  $\lambda \leq 1$ .

Nas equações (2.51) e (2.55), o que seria equivalente a  $\lambda$  não é tão evidente e dependerá dos parâmetros do meio. No entanto, de acordo com Elsherbeni (2015), pode-se utilizar a seguinte expressão para determinar o valor de  $\Delta t$  para simulações com uma dimensão espacial:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta h}{c}, \quad (2.70)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

A equação (2.70) representa que, em um passo de tempo, a onda não pode propagar uma distância maior que  $\Delta h$ . Esta é chamada de condição de CLF (Courant–Friedrichs–Lewy) e é suficiente para garantir a estabilidade da simulação (ELSHERBENI, 2015). Apesar da equação (2.70) utilizar a velocidade da luz no vácuo, é de se esperar que este critério seja suficiente para garantir a estabilidade em qualquer meio material, uma vez que a velocidade da luz na matéria sempre será menor que a do vácuo. Por conveniência e facilidade de cálculo, Sullivan (2013) utiliza como regra prática a seguinte expressão:

$$\Delta t = \frac{\Delta h}{2 \cdot c}. \quad (2.71)$$

Por fim, a equação (2.71) será utilizada nas simulações ao longo deste trabalho.

### 2.4.5 Dispersão Numérica

Chapra e Canale (2013) mostram que as derivadas numéricas possuem erros de aproximação. Apesar disto, de acordo com Elsherbeni (2015), os métodos de solução FDTD geralmente produzem uma boa aproximação para o comportamento físico dos campos. Ainda assim, o uso de aproximações por diferenças finitas de funções contínuas introduz erros em sua solução.

Elsherbeni (2015) explica que mesmo para um meio homogêneo, a velocidade de propagação das ondas no método numérico difere da velocidade real de propagação, esta diferença entre velocidade é chamada de dispersão numérica.

Neste contexto, nos algoritmos FDTD, a dispersão numérica pode ser entendida, como abordado em Elsherbeni (2015), considerando inicialmente uma onda plana que se propaga ao longo de  $x$  no espaço livre da seguinte maneira:

$$E_z(x, t) = E_0 \cos(k_x x - \omega t), \quad (2.72)$$

$$H_y(x, t) = H_0 \cos(k_x x - \omega t). \quad (2.73)$$

Assim, nota-se que a equação (2.72) satisfaz a equação de onda:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_z \quad (2.74)$$

Ao substituir a equação (2.72) na equação de onda (2.74), obtém-se:

$$k_x^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2. \quad (2.75)$$

A relação (2.75) foi obtida analiticamente e não contém erros de aproximação. Agora, utilizando a aproximação por diferenças finitas, a relação de dispersão difere da equação (2.75), como será demonstrado a seguir.

As equações (2.72) e (2.73) satisfazem as equações de Maxwell unidimensionais:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (2.77)$$

De posse do mesmo procedimento mostrado na seção 2.4.3, as equações (2.76) e (2.77) podem ser reescritas como:

$$\frac{E_x^{n+1}(i) - E_z^n(i)}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{H_y^{n+1/2}(i) - H_y^{n+1/2}(i-1)}{\Delta x}, \quad (2.78)$$

$$\frac{H_y^{n+1/2}(i) - H_y^{n-1/2}(i)}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_0} \frac{E_z^n(i+1) - E_z^n(i)}{\Delta x}. \quad (2.79)$$

Como as equações (2.72) e (2.73) são funções contínuas, elas podem ser discretizadas da seguinte maneira:

$$E_z^n(i) = E_0 \cos(k_x i \Delta x - \omega n \Delta t), \quad (2.80)$$

$$E_z^{n+1}(i) = E_0 \cos(k_x i \Delta x - \omega(n+1)\Delta t), \quad (2.81)$$

$$E_z^n(i+1) = E_0 \cos(k_x(i+1)\Delta x - \omega n \Delta t), \quad (2.82)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i) = H_0 \cos(k_x(i+0,5)\Delta x - \omega(n+0,5)\Delta t), \quad (2.83)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i-1) = H_0 \cos(k_x(i-0,5)\Delta x - \omega(n+0,5)\Delta t), \quad (2.84)$$

$$H_y^{n-\frac{1}{2}}(i) = H_0 \cos(k_x(i+0,5)\Delta x - \omega(n-0,5)\Delta t) \quad (2.85)$$

Aplicando as equações (2.80) a (2.85) em (2.78) e (2.79) e efetuando manipulações algébricas, obtém-se:

$$\frac{H_0}{\Delta t} \sin(0,5\omega\Delta t) = \frac{-E_0}{\mu_0\Delta x} \sin(0,5k_x\Delta x), \quad (2.86)$$

$$\frac{E_0}{\Delta t} \sin(0,5\omega\Delta t) = \frac{-H_0}{\varepsilon_0\Delta x} \sin(0,5k_x\Delta x). \quad (2.87)$$

Desta forma, as equações (2.86) e (2.87) podem ser combinadas em uma única equação como:

$$\left[ \frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[ \frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \right]^2. \quad (2.88)$$

A equação (2.88) é a relação de dispersão obtida utilizando a diferenciação numérica. E comparando as equações (2.75) e (2.88), verifica-se que elas são distintas. Esta diferença indica que existe um erro numérico na solução real do problema (ELSHERBENI, 2015).

Na sequência, considerando a seguinte relação:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = x. \quad (2.89)$$

É possível mostrar que, quando o argumento dos senos da equação (2.88) tender a zero, a relação de dispersão torna-se a mesma do caso ideal da equação (2.75). Isto indica que o erro por dispersão numérica se torna menor conforme os valores de  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  e  $\omega$  sejam reduzidos. Além do mais, a presença de  $\omega$  no argumento do seno também evidencia a importância de utilizar valores cada vez menores para  $\Delta t$  conforme a frequência angular cresce.

A equação (2.88) foi deduzida com base nas equações de Maxwell em meios sem perdas e não dispersivos. De fato, ao abordar meios com perdas, a dispersão numérica se torna muito complexa. Como abordado em Pereda *et al.*, (1998), a relação de dispersão para

um meio com perdas é dada pela equação (2.90).

$$\tilde{\epsilon}_{TA}\mu \frac{\sin^2\theta_t}{\Delta_t^2} = \frac{\sin^2\theta_h}{\Delta h^2}, \quad (2.90)$$

$$\tilde{\epsilon}_{TA} = \epsilon - \frac{j\sigma\Delta t}{2\tan\theta_t}, \quad (2.91)$$

onde  $\theta_t = \frac{\omega\Delta t}{2}$  e  $\theta_h = \frac{k\Delta h}{2}$ .

Portanto, a equação (2.90) demonstra a dificuldade na escolha de valores para  $\Delta t$  e  $\Delta h$  para minimizar a dispersão numérica. Pereda *et al.* (1998) mostram que não existe valor ideal que reduza a zero a dispersão numérica, em contraste com a relação de dispersão (2.88), que substituindo  $\Delta t = \frac{\Delta h}{c}$ , a equação de dispersão se reduz ao caso ideal da equação (2.75). Este procedimento é conhecido como *Magical Step* (Passo Mágico) definido no trabalho de (TAFLOVE; HAGNESS, 2005).

#### 2.4.6 Condições de Fronteira Absorvente

Na utilização do método FDTD tem-se o seguinte problema: o tratamento da fronteira do espaço simulado. Este problema se torna mais evidente analisando as equações de atualização (2.51) e (2.55), onde os argumentos  $(i + 1)$  e  $(i - 1)$  podem trazer problemas ao atualizar os campos caso um tratamento especial nas fronteiras não seja realizado. Este é um típico problema de fronteira, como discutido em Taflove e Hagness (2005).

Por exemplo, ao atualizar o campo  $E_x(i = 1)$ , na equação (2.51) determina-se:

$$E_x^{n+1}(1) = C_{exe}(1)E_x^n + C_{exhy}(1)[H_y^{n+1/2}(1) - H_y^{n+1/2}(0)] + C_{exj}(1)J_x^{n+1/2}. \quad (2.92)$$

Assim, o problema ocorre no termo  $H_y^{n+1/2}(0)$ , pois nosso domínio foi discretizado para  $i$  começando em um, portanto o campo magnético em  $i = 0$  não existe.

Este tipo de problema é resolvido especificando um contorno, para o caso unidimensional uma abordagem apresentada em Taflove (2005) consiste em reservar as primeiras células de cada extremidade do domínio para especificar o contorno e são atualizadas de forma diferente daquelas descritas nas equações (2.51) e (2.55).

Por exemplo, considerando, uma linha com cem células, conforme mostrado na Figura 4, tem-se  $i = 1, 2, 3, 4, \dots, 100$ . E utilizando as equações de atualização, pode-se atualizar os campos nas posições  $i = 2, 3, 4, \dots, 99$ , garantindo assim que o campo da célula anterior e posterior exista e os argumentos  $(i + 1)$  e  $(i - 1)$  não ocasionem nenhum problema. No entanto, caso as células das extremidades não sejam atualizadas, os campos nestas células serão nulos. De acordo com Elsherbeni (2015), um campo elétrico fixo como nulo, no contexto do Eletromagnetismo é entendido pelo método das diferenças finitas no

domínio do tempo como um material condutor perfeito (*Perfect Electrical Conductor*), ocasionando uma reflexão total das eventuais ondas que incidem sobre o meio.

Em Sullivan (2013) afirmou-se que, para garantir que as ondas eletromagnéticas fluam para fora do contorno, como se estivessem em um espaço livre, condições de contorno absorventes (*Absorbing Boundary Conditions-ABCs*) são necessárias.

Para o caso unidimensional, Sullivan (2013) descreve a implementação simples de ABCs, cuja solução é apresentada a seguir. A distância  $S$  que uma onda propaga em um instante de tempo  $\Delta t$ , é:

$$S = c\Delta t. \quad (2.93)$$

O critério de estabilidade na equação (2.71) pode ser escrito como:

$$S = c\frac{\Delta x}{2c} = \frac{\Delta x}{2}. \quad (2.94)$$

Assim, mostra-se que, em um instante de tempo  $\Delta t$ , uma onda viajando na velocidade da luz percorre metade de um comprimento de célula. Segundo Sullivan (2013), uma abordagem intuitiva nos diz que uma condição de contorno aceitável deve ser:

$$E_x^n(0) = E_x^{n-2}(1), \quad (2.95)$$

ou, considerando um intervalo em que  $i$  começa em 1, tem-se:

$$E_x^n(1) = E_x^{n-2}(2). \quad (2.96)$$

Dessa forma, uma abordagem semelhante é feita para a extremidade superior da linha, considerando que o valor máximo de  $i$  seja 100, então:

$$E_x^n(100) = E_x^{n-2}(99). \quad (2.97)$$

Desta forma, os campos na região de fronteira são atualizados tomando-se o campo na célula anterior com dois intervalos de tempo no passado. O mesmo procedimento é feito para os campos magnéticos. Efetivamente, o algoritmo entende que as ondas estão fluindo para fora do domínio de simulação, não permitindo a ocorrência de reflexões.

Por fim, em meios em que a velocidade de propagação é diferente da velocidade da luz, esta abordagem não deve ser aplicada, e as condições de contorno devem levar em conta a velocidade de propagação da onda.

## 2.5 *Software* SciLab

O SciLab é um *software* de matemática computacional destinado a cientistas e engenheiros. Sua licença é livre, permitindo a utilização do *software* para qualquer propósito (SCILAB Team, 2025).

O *software* se destaca pela capacidade de resolver numericamente problemas das mais diversas áreas do conhecimento, incluindo problemas relacionados a equações diferenciais.

A utilização do SciLab é feita por meio da programação em sua própria linguagem, cuja sintaxe é bastante próxima à do MATLAB e apresenta elementos familiares a linguagens como C (BAUDIN, 2011). O SciLab oferece nativamente funções importantes na formulação de problemas, sem necessidade de utilizar bibliotecas adicionais como o Numpy para a linguagem Python. Além disto, o usuário tem a liberdade de criar funções próprias e realizar operações mais detalhadas.

Ademais, o SciLab pode ser visto como uma alternativa a programas mais comuns como o MATLAB, oferecendo a vantagem de ser gratuito com todas as funções liberadas para uso.

Com as funcionalidades oferecidas pelo SciLab, e os fundamentos teóricos apresentados, o método FDTD é implementado conforme abordado no próximo capítulo.

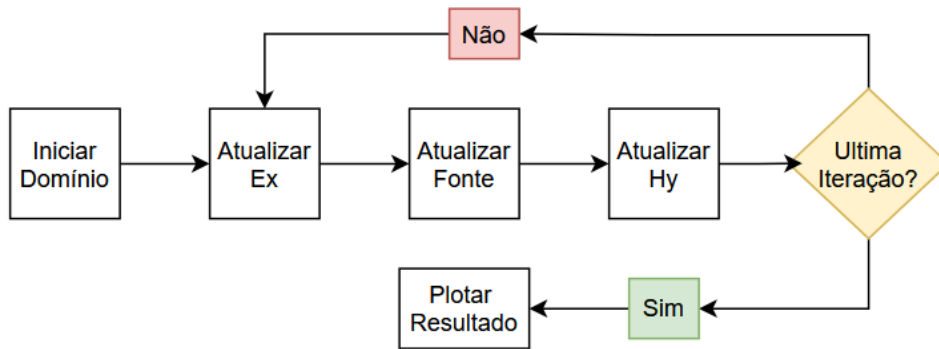
### 3 Metodologia Desenvolvida

Neste capítulo, é apresentada a metodologia desenvolvida neste trabalho objetivando a implementação do algoritmo FDTD.

#### 3.1 Estruturação do Algoritmo de Implementado

O algoritmo implementado neste trabalho foi baseado nos conceitos apresentados no capítulo 2. Na Figura 7 é exibido um diagrama de blocos que mostra os passos desenvolvidos no algoritmo utilizado na solução dos problemas. A seguir, são apresentadas as explicações dos blocos presentes no algoritmo:

Figura 7 – Diagrama de blocos do algoritmo de solução implementado.



Fonte: Autor, 2025.

1. **Iniciar Domínio:** Esta seção do código é responsável por iniciar as variáveis que armazenam os campos elétricos e magnéticos, bem como os vetores que comportam os valores de permeabilidade e permissividade do meio e os passos espaciais e temporais. Com os valores de permissividade elétrica, permeabilidade magnética, condutividade, passo temporal e passo espacial, pode-se posteriormente calcular os coeficientes das equações (2.51) e (2.55).
2. **Atualizar  $E_x$ :** Utilizando a equação (2.51), os campos  $E_x$  são atualizados para todos os valores de  $i$ , respeitando as condições de contorno. Na Figura 8 é mostrada a implementação da equação (2.51) como função no SciLab.

Figura 8 – Equação de atualização para  $E_x$  no SciLab.

```
function D=updateEx(D)
    for i=2:D.nh-1
        D.Ex(i)=D.Cexe(i)*D.Ex(i)+D.Cexhy(i)*(D.Hy(i)-D.Hy(i-1))-D.Cexj(i)*D.Jx(i)
    end
end
```

Fonte: Autor, 2025.

### 3. Atualizar Fonte:

Uma fonte de campo elétrico pode ser introduzida, conforme abordado em Sullivan e Houle (2020), atualizando o campo elétrico em um ponto da simulação utilizando uma função que descreve o comportamento da fonte, este tipo de fonte é chamada *Hard Source*, e possui algumas limitações, uma limitação para implementação de uma *Hard Source*, deve-se ao fato de ajustar manualmente o valor do campo elétrico em certo ponto como um valor desejado, e assim, este artifício ocasionará reflexões indesejadas. Caso uma fonte de campo elétrico senoidal, por exemplo, seja posicionada no ponto  $i_{fonte}$ , basta atualizar o campo elétrico como descrito na equação (3.1).

$$E_x^n(i_{fonte}) = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot n \cdot \Delta t). \quad (3.1)$$

Um exemplo da implementação da equação (3.1) no algoritmo FDTD é mostrado na Figura 9.

Figura 9 – Exemplo da implementação de fonte de campo elétrico.

```
function D=SourceConfig(D)
    if D.Stype=='seno' then
        w=2*pi*D.Sfreq
        for n=1:D.nt
            t=n*D.dt
            D.source(n)=D.Smax*cos(w*t)
        end
    end
end
```

Fonte: Autor, 2025.

Com isso, na Figura 9, é criado um vetor que contém o valor do campo elétrico para cada instante de tempo da simulação. Este valor pode ser atribuído na função de atualização de  $E_x$  em cada iteração, conforme ilustrado na figura 10. Outro tipo de fonte utilizada é a *Soft Source*, que permite que eventuais campos eletricos passem por ela sem que ocorram reflexões. Conforme discutido em Sullivan e Houle (2020), uma *Soft Source* pode ser obtida somando o valor do campo eletrico da fonte em

um ponto em que se deseja aplicar a excitação:

$$E_x^n(i_{fonte}) = E_x^{n-1}(i_{fonte}) + E_s(n), \quad (3.2)$$

onde  $E_s(n)$  representa a função que descreve a forma de onda a ser utilizada. Geralmente formas de onda senoidais e pulsos Gaussianos são utilizados.

#### 4. Atualizar $H_y$ :

Utilizando a equação(2.55), os campos  $H_y$  são atualizados para todos os valores de  $i$ , de forma análoga à atualização de  $E_x$ .

#### 5. Última Iteração?:

Neste ponto, é verificado se o numero do intervalo de tempo é o valor de tempo máximo desejado na simulação, em caso afirmativo, os campos são exibidos em gráficos. Em caso negativo, o ciclo se repete para o próximo intervalo de tempo.

Diante disto, cada bloco apresentado na Figura 7, pode ser implementado na forma de uma função no SciLab. Posteriormente, essas funções são utilizadas em um *loop* principal, conforme ilustrado na Figura 10.

Figura 10 – Exemplo de código para FDTD.

```
function D=runFDTD(D)
    for n=1:D.nt //Laço temporal

        D=updateEx(D) //atualizar Ex

        D.Ex(2)=D.source(n) //atualizar fonte em i=2

        D.ExM(:,n)=D.Ex(:) //salva Ex atual

        D=updateHy(D) //atualizar Hy
        D.HyM(:,n)=D.Hy(:)//salva Hy atual

    end
endfunction
```

Fonte: Autor, 2025.

## 3.2 Simulação para Meio sem Perdas e e Validação do Algoritmo

As equações de Maxwell são completamente aceitas pela literatura como uma descrição correta para a Eletrodinâmica Clássica. Como abordado em Griffiths (2013), as equações de Maxwell, junto com a força de Lorentz, resumem todo o eletromagnetismo clássico. Diante disso, deve-se considerar que um algoritmo de solução, baseado na solução numérica das equações de Maxwell, também seja funcional, apesar das limitações geradas pelas aproximações. Ainda assim, é essencial que o método seja validado, uma vez que isso garante a confiabilidade dos resultados e auxilia na correção de eventuais falhas.

Uma das formas de validar o algoritmo FDTD é simular um caso simples onde calcula-se os campos elétricos e magnéticos por meio das soluções analíticas e, posteriormente, compara-se a solução analítica com a solução numérica.

Um caso em particular que descreve a propagação de uma onda de campo elétrico senoidal se propagando em um meio com perdas é descrito pela equação (2.33). Este cenário permite a validação do algoritmo por meio da comparação das soluções do tipo:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-\beta z} \cos(\alpha z - \omega t + \delta_E) \hat{x}, \quad (2.33)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são, respectivamente, dados pelas equações (2.29) e (2.30).

No entanto, para que uma simulação possa ser comparada com equação (2.33), seria necessário implementar uma fonte distante, ou *Far-Zone-Source*, descrita em Elsherbeni (2015). Com o uso de uma *Hard Source*, as reflexões que ocorrem no material com perdas trariam problemas nos resultados. Dessa forma, a validação do algoritmo será feita utilizando um meio sem perdas, que pode ser descrito pela equação (2.33) fazendo  $\sigma = 0$ :

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(-\omega t) \hat{x} = E_0 \cos(\omega t) \hat{x}, \quad (3.3)$$

onde a fase de campo elétrico,  $\delta_E$  é nula por convenção.

Os parâmetros utilizados na formulação do problema serão divididos em dois grupos: parâmetros físicos e parâmetros de simulação. Os parâmetros físicos são aqueles que descrevem grandezas físicas como, por exemplo, intensidade de campo elétrico, condutividade elétrica, etc. Os parâmetros de simulação são aqueles que descrevem os dados utilizados para a simulação FDTD, tais como: passo espacial, passo temporal, número de células, etc. Frisando que, os parâmetros físicos devem ser idênticos para o cálculo analítico e para a simulação. Os parâmetros físicos utilizados para a simulação em meios sem perdas são listados na Tabela 1:

Tabela 1 – Parâmetros físicos e seus respectivos valores utilizados.

Parâmetro	Valor
$\sigma$	$0 \text{ S/m}$
$\epsilon$	$8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
$\mu$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$
$E_0$	$1 \text{ V/m}$
$\omega$	$60\pi \cdot 10^6 \text{ rad/s}$

Fonte: Autor, 2025.

Ressalta-se que, os parâmetros físicos apresentados na Tabela 1 são escolhidos de modo a obter uma simulação mais simples e com resultados que sejam facilmente visualizados.

Por outro lado, os parâmetros de simulação utilizados são dados pela Tabela 2. Assim

como mostrado na Tabela 2, as simulações serão realizadas com diferentes quantidades de instantes de tempo, com o intuito de verificar como o erro entre simulação e cálculo analítico se comporta conforme o número de iterações aumenta.

Tabela 2 – Tabela de parâmetros de simulação utilizados.

Parâmetro	Valor
$\Delta h$	0,01 m
$\Delta t$	$1,688 \cdot 10^{-11}$ s
$N_c$	200
$N_t$	1000 – 2000 – 5000

Fonte: Autor, 2025.

Os parâmetros  $N_c$  e  $N_t$  apresentados na Tabela 2 são, respectivamente, o número de células e o numero de instantes de tempo da simulação. Os valores para esses parâmetros são determinados de forma arbitrária. Por outro lado, os parâmetros  $\Delta t$  e  $\Delta h$  são determinados conforme as restrições que garantem a estabilidade da simulação, apresentadas na seção 2.4.4. Esses parâmetros são escolhidos arbitrariamente, mas obedecem as restrições apresentadas na Seção 2.4.4.

Posteriormente, a comparação das soluções é realizada por meio do erro percentual descrito a seguir:

$$erro\ percentual = \frac{|E_{FDTD} - E_{analitico}|}{|E_{analitico}|} \cdot 100\%, \quad (3.4)$$

onde  $E_{FDTD}$  é o valor do campo elétrico calculado pelo algoritmo e  $E_{analitico}$  o valor do campo elétrico calculado analiticamente. Com o uso do SciLab, é possível calcular e exibir graficamente o erro percentual ponto a ponto para cada instante de tempo da simulação.

A equação (3.3) descreve uma onda plana de campo elétrico na direção  $\hat{x}$  em regime permanente. No algoritmo FDTD a onda é gerada em um instante de tempo definido, geralmente nas primeiras iterações; isto é, efeitos transitórios são presentes e podem gerar erros na comparação. Diante disto, espera-se que o erro percentual seja reduzido conforme o tempo transcorrido aumenta.

### 3.3 Simulação para Meios com Perfil de Condutividade Variáveis

Como discutido nas seções anteriores, em perfis com condutividade variável, a solução analítica das equações de Maxwell é complexa e, dependendo do problema, pode até se tornar inviável. Em situações como estas, as soluções numéricas são necessárias.

Para comparação com o caso analítico, foi utilizada uma onda senoidal semelhante a equação (3.3). Para as simulações com meios com perdas, são utilizados pulsos Gaussianos

com origem no espaço livre e que incidem sobre os meios com perdas.

O motivo de se utilizar um pulso Gaussiano no lugar de uma fonte senoidal se dá pelo fato de ser mais fácil implementar e visualizar a atenuação, uma vez que o pulso não fornece campo elétrico periodicamente como é feito pelas fontes senoidais.

Assim, o pulso Gaussiano é implementado da seguinte maneira:

$$E_x(t) = E_0 e^{-0,5\left(\frac{t_0-t}{S}\right)^2}, \quad (3.5)$$

onde  $E_0$  é a amplitude máxima do campo elétrico,  $t_0$  é o instante de tempo em que a curva atinge o pico e  $S$  é uma constante que determina a largura do pulso.

As constantes da equação (3.5) foram escolhidas de modo a facilitar a visualização e o pulso Gaussiano foi implementado em todas as simulações com meios com perdas, como descrito pela equação (3.6):

$$E_x[n] = e^{-0,5\left(\frac{40-n}{12}\right)^2}, \quad (3.6)$$

Destaca-se que a equação (3.6) está em função de  $n$ , que é o instante de tempo da simulação, e não mais  $t$ . Efetivamente, criando uma função discreta que será implementada no SciLab. Assim, os parâmetros de simulação utilizados para as simulações em meios com perdas são descritos pela Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros de simulação para meios com perdas.

Parâmetro	Valor
$\Delta h$	0,01 m
$\Delta t$	$1,688 \cdot 10^{-11}$ s
$N_c$	200
$N_t$	500

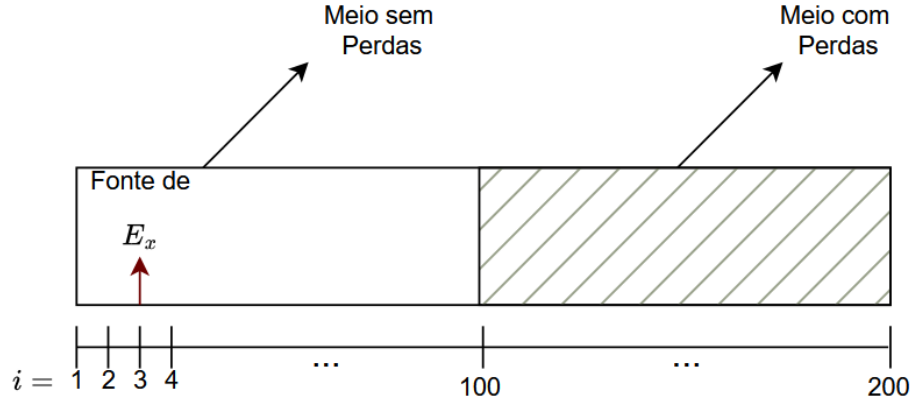
Fonte: Autor, 2025.

Observa-se pela Tabela 3 que os parâmetros apresentados são idênticos aqueles mostrados na Tabela 2, com exceção de  $N_t$ . O parâmetro  $N_t$  é escolhido de forma que o tempo máximo de simulação não seja grande o bastante para que o pulso Gaussiano propague-se até o final do espaço simulado, evitando assim reflexões indesejadas.

O espaço simulado é dividido ao meio, a partir da célula 100, e um meio com condutividade variável é implementado. Este meio possui permissividade elétrica e permeabilidade magnética iguais ao espaço livre, a única diferença está na condutividade elétrica.

Uma fonte do tipo *Soft-Source* de pulso Gaussiano, conforme a equação (3.6) é implementada na célula de número 3. Na Figura 11 é mostrado um esquemático representando a disposição do problema a ser simulado.

Figura 11 – Representação esquemática da simulação dos meios com e sem perdas.



Fonte: Autor, 2025.

Agora, na Tabela 4 são apresentados os parâmetros físicos utilizados para as simulações em meios com perdas.

Tabela 4 – Parâmetros físicos para simulação em meios com perdas.

Parâmetro	Valor
$\sigma_{max}$	0,05 S/m
$\epsilon$	$8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m
$\mu$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$E_0$	1 V/m
$t_0$	40
$S$	12

Fonte: Autor, 2025.

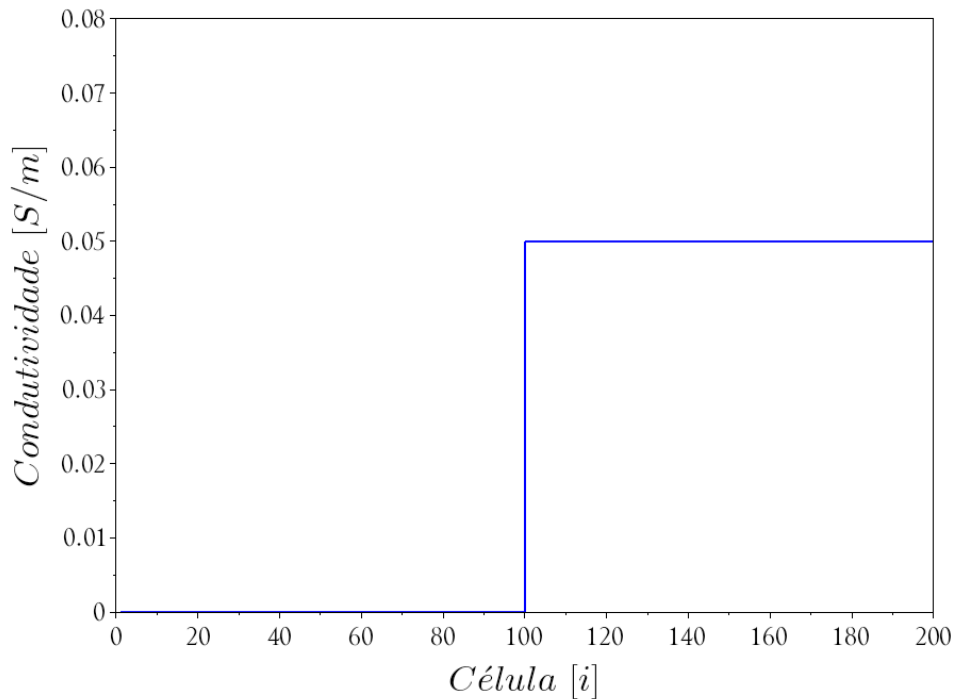
Observando a Tabela 4 nota-se que o parâmetro  $\sigma_{max}$ , representa o valor máximo de condutividade do meio. No entanto, a distribuição de condutividade depende do caso abordado, sendo esses abordados na sequência.

Após a definição do meio a ser simulado, foram implementadas as condições de contorno absorventes nas extremidades do espaço simulado. Com isso, espera-se que apenas a extremidade da esquerda absorva as ondas corretamente. Uma vez que a velocidade das ondas nos meios com perdas é diferente da velocidade da luz, a condição de contorno apresentada na seção 2.4.6 não pode ser aplicada. No entanto, isto não representa grande problema, uma vez que espera-se que as ondas sejam atenuadas significativamente antes de atingirem a extremidade direita da simulação.

### 3.4 Simulação Para Meio com Perfil de Condutividade Constante

Para a simulação com um meio com condutividade constante, basta atribuir o valor de  $\sigma_{max}$  da Tabela 4 em todas as células a partir da célula 100. Na Figura 12 é mostrado o perfil da condutividade implementado.

Figura 12 – Distribuição de condutividade constante em função das células.



Fonte: Autor, 2025.

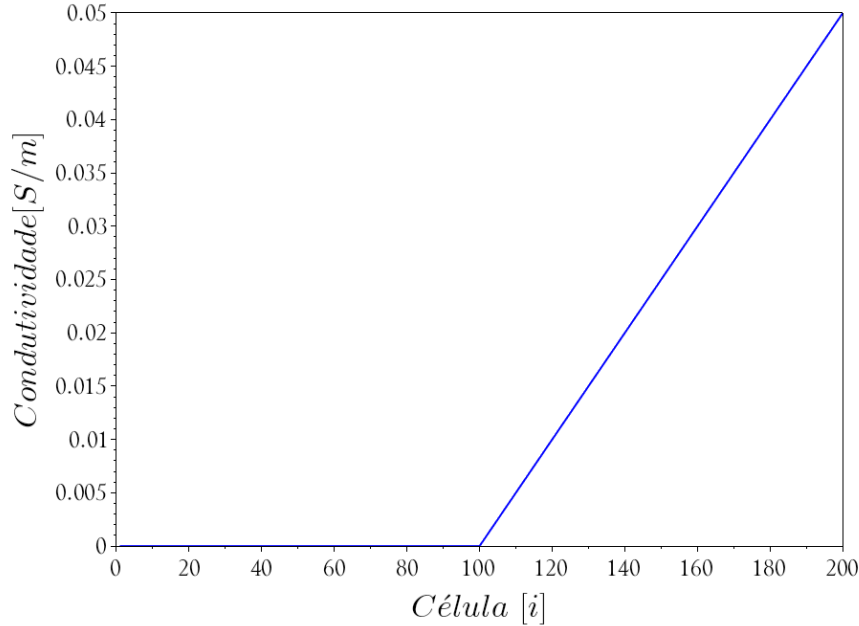
### 3.5 Simulação para Meio com Perfil de Condutividade Linear

Para este caso, o valor de condutividade aumenta linearmente do início ao fim da região com perdas, de modo que o valor máximo de condutividade seja 0,05 S.m na célula 200. Esta distribuição pode ser gerada por meio da seguinte expressão:

$$\sigma[i] = \frac{\sigma_{max}}{100} \cdot i - \sigma_{max} = 0,005 \cdot i - 0,05. \quad (3.7)$$

Assim, na Figura 13 é exibida a distribuição de condutividade gerada pelo SciLab e descrita pela equação (3.7).

Figura 13 – Distribuição de condutividade linear em função das células.



Fonte: Autor, 2025.

A partir desta simulação, obtém-se o valor do campo elétrico em cada ponto do meio em função de cada instante de tempo.

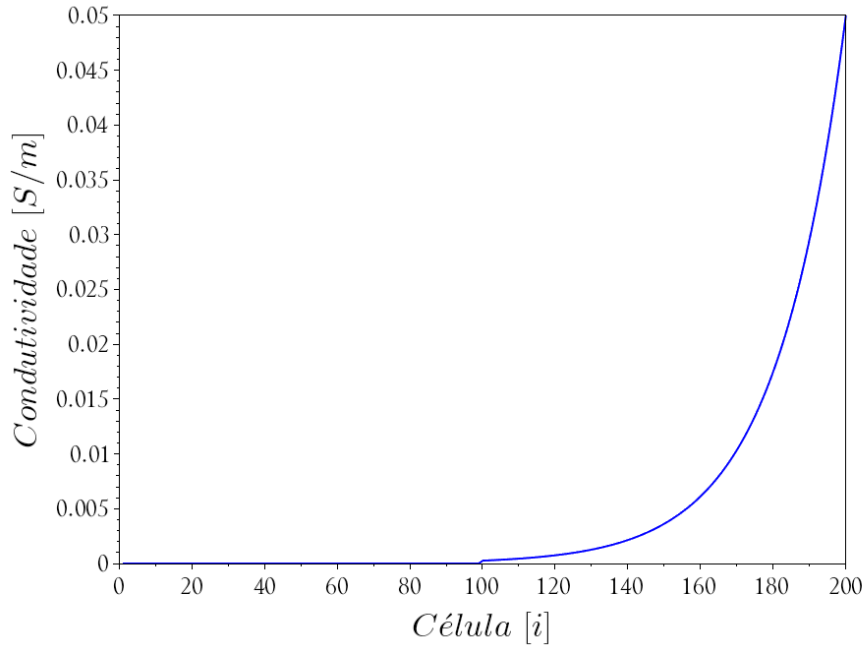
### 3.6 Simulação para Meio com Perfil de Condutividade Exponencial

De forma análoga ao caso linear, realizou-se a simulação de uma onda senoidal de campo elétrico que atravessa um meio, cuja condutividade elétrica admite um perfil exponencial. Assim como no caso anterior, o valor de condutividade aumenta conforme a onda adentra no material. Mas agora, esta relação é descrita pela seguinte expressão:

$$\sigma[i] = 0,05e^{5,256\left(\frac{i-100}{100}-1\right)}. \quad (3.8)$$

Portanto, na Figura 14 é ilustrado o perfil de condutividade elétrica em função da distância, gerado pelo SciLab e descrita pela equação (3.8).

Figura 14 – Distribuição exponencial de condutividade em função das células.



Fonte: Autor, 2025.

### 3.7 Análise do Tempo de Processamento

Todas as simulações foram realizadas no *software* SciLab, em um computador cujas configurações são:

- Modelo: Notebook Acer Aspire 3;
- Processador: Intel Core i5 1235U;
- Memória RAM: 8Gb DDR4;
- Armazenamento: 240Gb SSD;
- Placa Gráfica: Intel Iris Xe;
- Sistema Operacional: Windows 11.

Dessa forma, o SciLab dispõe de ferramentas que permitem acompanhar o tempo de execução de um algoritmo. Uma das ferramentas que oferecem esta funcionalidade são as funções nativas “tic()” e “toc()”. As funções são explicadas na documentação oficial do SciLab e elas são discutidas brevemente a seguir:

- Função “tic()”: ao chamar esta função no algoritmo, um relógio é iniciado no mesmo instante. Este relógio, ao iniciado, começa a marcar o tempo decorrido de execução.

- Função “toc()”: esta função, quando chamada, interrompe o relógio iniciado pela função “tic()”, e retorna o valor do tempo decorrido em segundos.

Assim, como é de interesse saber o tempo decorrido durante a execução do código inteiro, a função “tic()” é chamada no início do algoritmo, enquanto a função “toc()” é colocada na última linha do código. Na Figura 15 é ilustrado um exemplo de uso dessas funções.

Figura 15 – Exemplo de implementação do cronômetro.

```

clc
clear
tic() //inicia o cronômetro

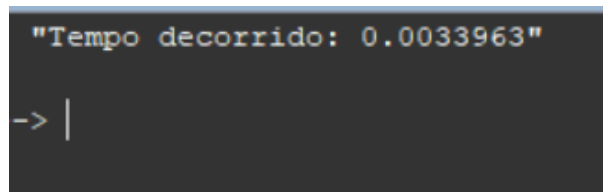
for a=[1:100] //função exemplo
    for b=[1:100]
        c=a+b
    end
end

tempo=toc() //para o cronômetro e memoriza o tempo
disp("Tempo decorrido: " +string(tempo))

```

Fonte: Autor, 2025.

Figura 16 – Saída do exemplo de implementação do cronômetro.



```

"Tempo decorrido: 0.0033963"
-> |

```

Fonte: Autor, 2025.

Na Figura 16 é mostrado o terminal de saída do SciLab, retornando o tempo em segundos da execução da função exemplo utilizada.

Neste contexto, estas ferramentas foram implementadas no algoritmo FDTD para registrar o tempo de execução de cada simulação. Vale ressaltar que o computador utilizado tem influência direta no tempo de execução. Como abordado em Sullivan (2020), as soluções numéricas de equações diferenciais demandam uma grande quantidade de operações. Isto indica que a velocidade do computador utilizado interfere muito no tempo de simulação. Para simulações mais complexas, recomenda-se computadores com maior poder de processamento para a obtenção de tempos de simulação menores.

Além do computador, a formulação do problema também tem grande impacto no tempo de execução do algoritmo. Fatores como passo temporal  $\Delta t$ , passo espacial  $\Delta h$  e número de células aumentam o número de cálculos necessários para a solução do problema.

Ao diminuir o passo espacial  $\Delta h$ , é necessário aumentar o número de células para cobrir uma mesma região; também é necessário ajustar o passo temporal  $\Delta t$  de modo a obedecer à condição de estabilidade. Estes fatores aumentam o número de cálculos necessários para a solução, fazendo com que o tempo de execução seja maior.

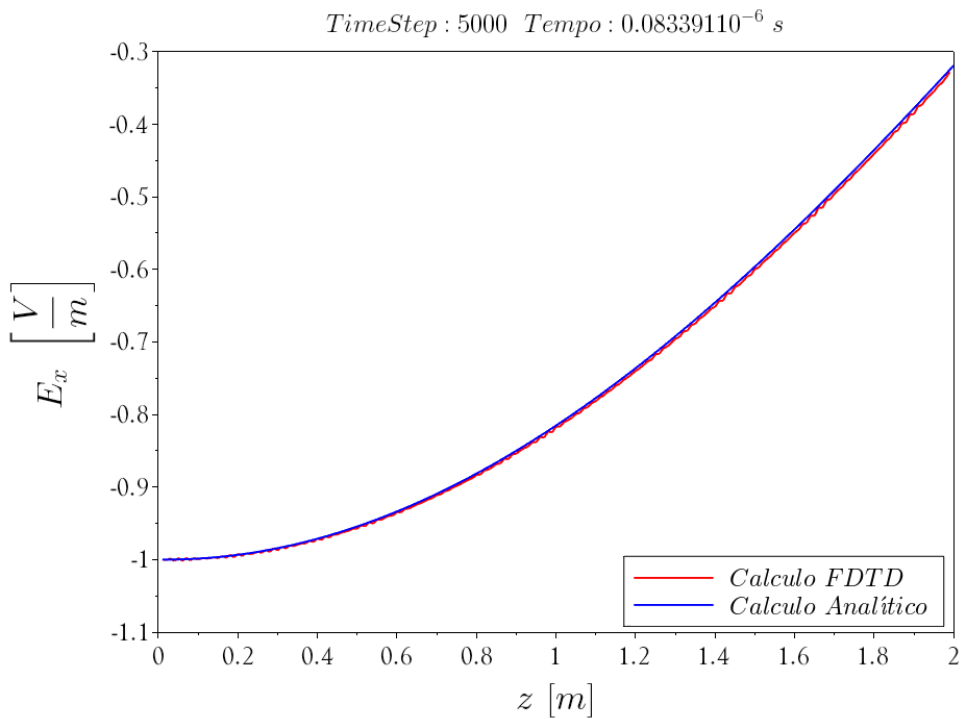
## 4 Resultados e Discussão

Neste capítulo são apresentados os resultados e a discussão das simulações do algoritmo FDTD nos cenários apresentados na metodologia

### 4.1 Simulação em Meio sem Perdas

Conforme apresentado na seção 3.2, a simulação de uma onda plana senoidal para um meio sem perdas foi realizada. Na Figura 17 é mostrado um gráfico comparativo entre o campo elétrico e a distância percorrida, para a simulação e para o cálculo analítico realizado por meio da equação (3.3), ambos no instante de tempo 5000 ou  $t = 8,339 \cdot 10^{-8} s$ .

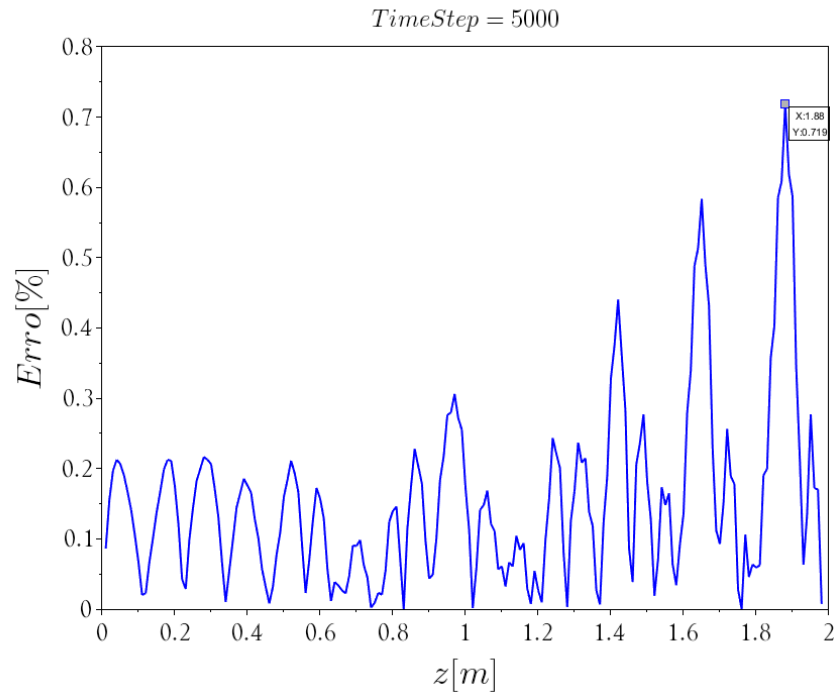
Figura 17 – Comparação entre o algoritmo FDTD e o cálculo analítico para o campo elétrico em função da distância, no instante 5000.



Fonte: Autor, 2025.

Analisando a Figura 17, verifica-se que as curvas comparadas são próximas, uma vez que elas estão praticamente sobrepostas. Este comportamento torna evidente quando observa-se a Figura 18. Nesta figura, constata-se o cálculo do erro percentual entre as curvas do algoritmo e o analítico do campo elétrico em função da distancia. O erro máximo obtido foi de 0,719% para a distância de 1,88  $m$ . Sendo assim, tais valores indicam a validação do algoritmo FDTD implementado

Figura 18 – Curva do erro percentual entre o algoritmo FDTD e o cálculo analítico mostrado na Figura 18.

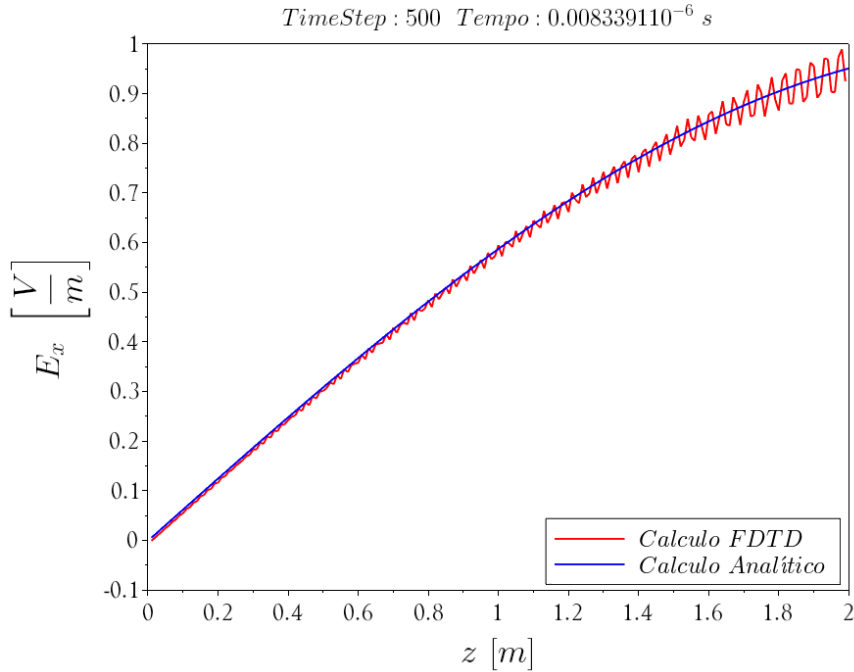


Fonte: Autor, 2025.

Como ilustrado na figura, o erro percentual máximo obtido foi de 0,719%, demonstrando que, para esta simulação, os resultados estão com um nível de precisão aceitável.

Apesar do baixo erro registrado no instante 5000, foi observado que o erro tende a ser maior nas primeiras iterações. A figura 19 mostra o comparativo entre o cálculo FDTD e o método analítico no instante de tempo 500.

Figura 19 – Comparação entre o algoritmo FDTD e o cálculo analítico para o campo elétrico em função da distância, no instante 500.

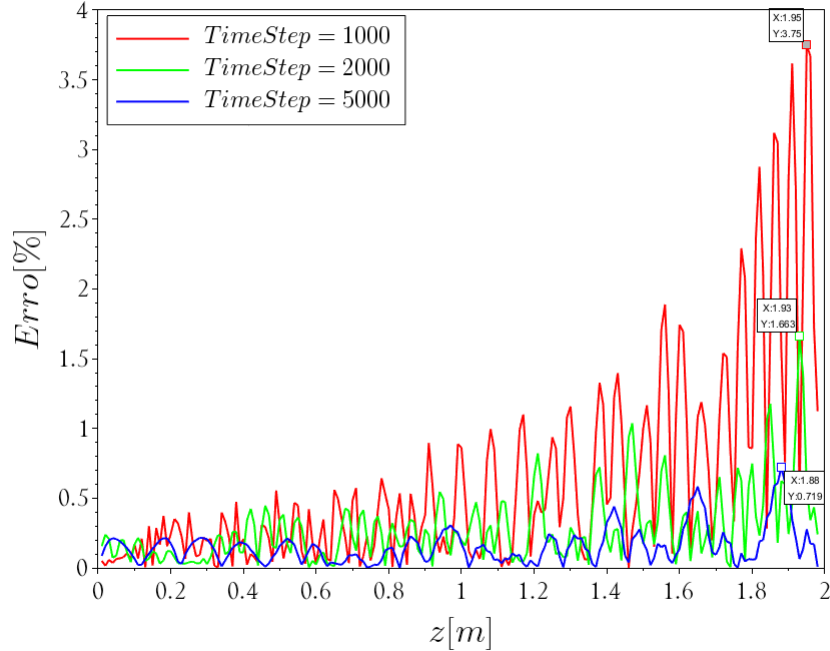


Fonte: Autor, 2025.

Assim, na Figura 19 observa-se que, à medida que a distância percorrida pela onda cresce, o cálculo FDTD apresenta oscilações de campo elétrico quando comparado com o cálculo analítico. A divergência dos resultados observada em instantes de tempo menores se deve ao fato de que a equação (3.3) descreve uma onda plana em regime permanente, ou seja, os efeitos transitórios gerados na onda não são considerados. Por outro lado, o algoritmo FDTD considera os efeitos transitórios ao se criar uma onda em um ponto que antes não havia nada. Estes efeitos transitórios são atenuados conforme o tempo evolui, isto é, em instantes de tempo maiores, a solução se aproxima do regime permanente.

Portanto, na Figura 20 são mostrados os erros percentuais obtido em três instantes de tempo diferentes, 1000, 2000 e 5000. Esta análise permite constatar o comportamento de diminuição do erro com o passar do tempo.

Figura 20 – Comparação entre o algoritmo FDTD e o cálculo analítico para o campo elétrico em função da distância, nos instantes 1000, 2000 e 5000.



Fonte: Autor, 2025.

Na Figura 20 visualiza-se que para os instantes 1000, 2000 e 5000 foram obtidos os erros percentuais máximos de 1,75% , 1,66% e 0,719%, respectivamente. Com isto nota-se que o erro percentual tende a diminuir conforme o tempo aumenta, o que corrobora com os resultados esperados.

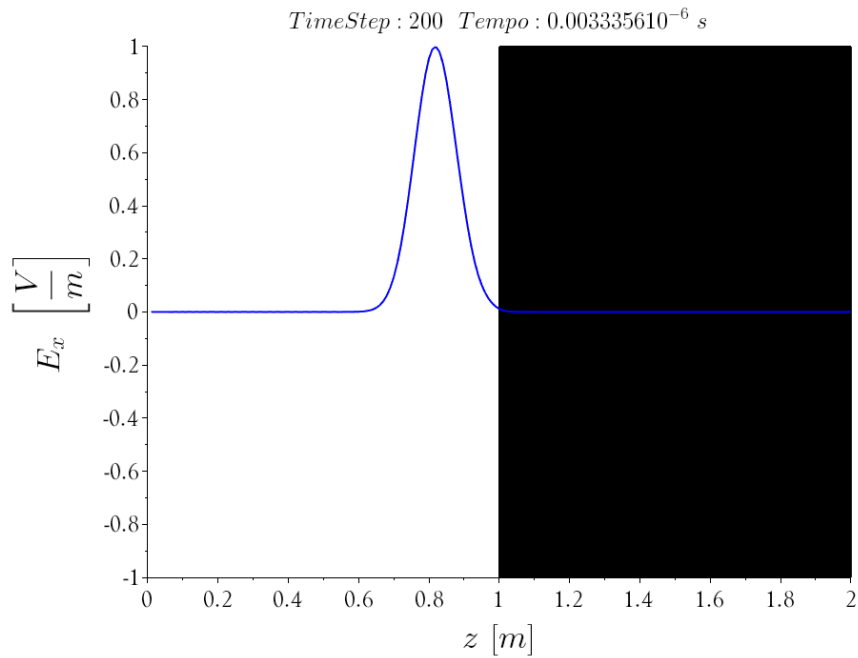
Diante destes resultados, destaca-se a importância da consideração de efeitos transitórios na simulação. Para casos onde os efeitos transitórios decorrentes da ativação da fonte de campo elétrico não são relevantes, simulações com mais instantes de tempo se mostraram mais precisas.

## 4.2 Resultados da Simulação em Perfil de Condutividade Constante

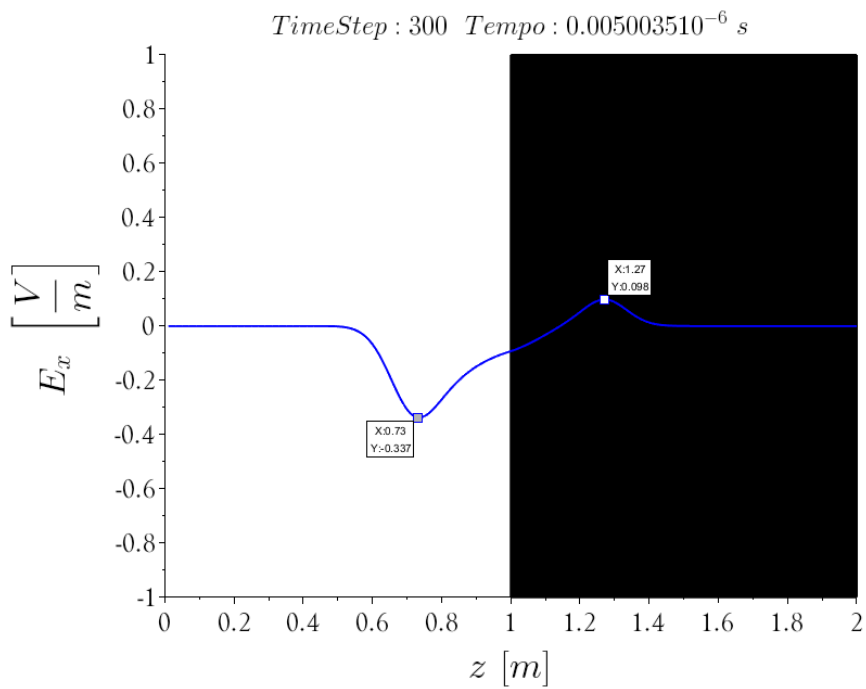
Na Figura 21-(a) são mostrados os resultados da simulação de um pulso Gaussiano que é gerado e percorre o espaço até atingir um meio com condutividade constante, conforme discutido na Seção 3.3.

Figura 21 – Resultado da simulação do pulso Gaussiano com a condutividade constantes para os instantes: (a) 200; (b) 300 e (c) 400.

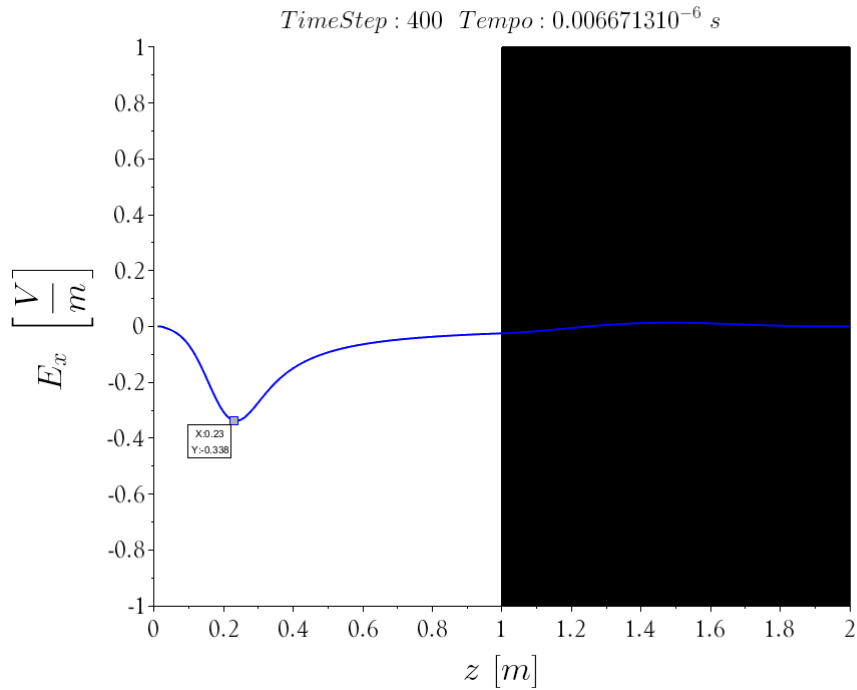
(a)



(b)



(c)



Fonte: Autor, 2025.

Observando a Figura 21-(a), a região preta no gráfico, para  $z > 1 \text{ m}$ , representa o meio com condutividade elétrica constante, enquanto a parte branca representa o espaço sem perdas, para o instante 200. Neste instante, verifica-se que, o pulso gaussiano se propaga em direção à região com perdas. Agora, na Figura 21-(b), para o instante 300, uma parcela do pulso gaussiano, cujo valor de pico do campo elétrico é de  $-0,337 \text{ V/m}$ , é refletida, enquanto outra parcela com amplitude de campo elétrico de  $0,098 \text{ V/m}$  adentra o meio e é gradativamente atenuada.

Por fim, na Figura 21-(c), para o instante 400, uma parcela refletida está prestes a deixar o domínio de simulação, enquanto a parcela absorvida foi quase completamente atenuada.

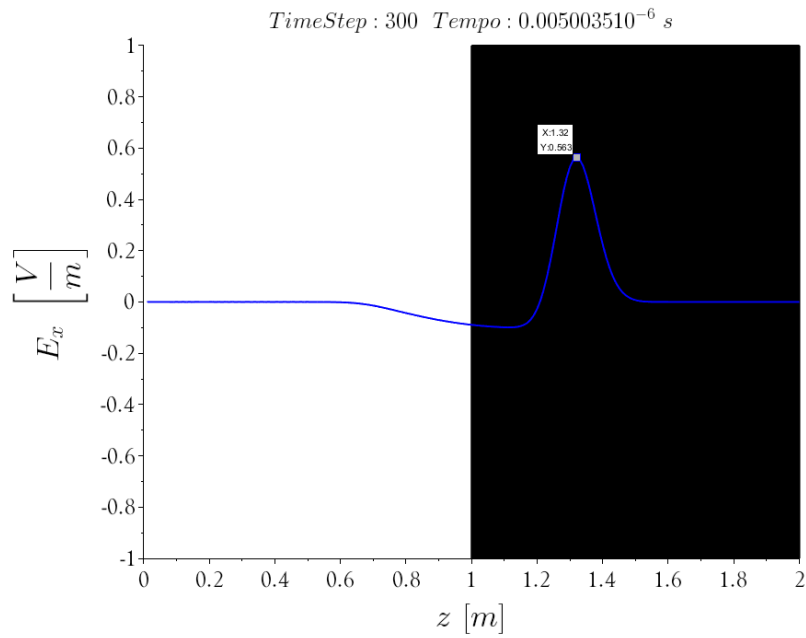
Ao todo, o algoritmo FDTD foi utilizado para determinar a evolução temporal da onda propagada. Visualizou-se a propagação do pulso Gaussiano, bem como a reflexão e transmissão da onda na interface entre o espaço livre e o meio com perdas com condutividade constante.

### 4.3 Resultados da Simulação em Perfil de Condutividade Linear

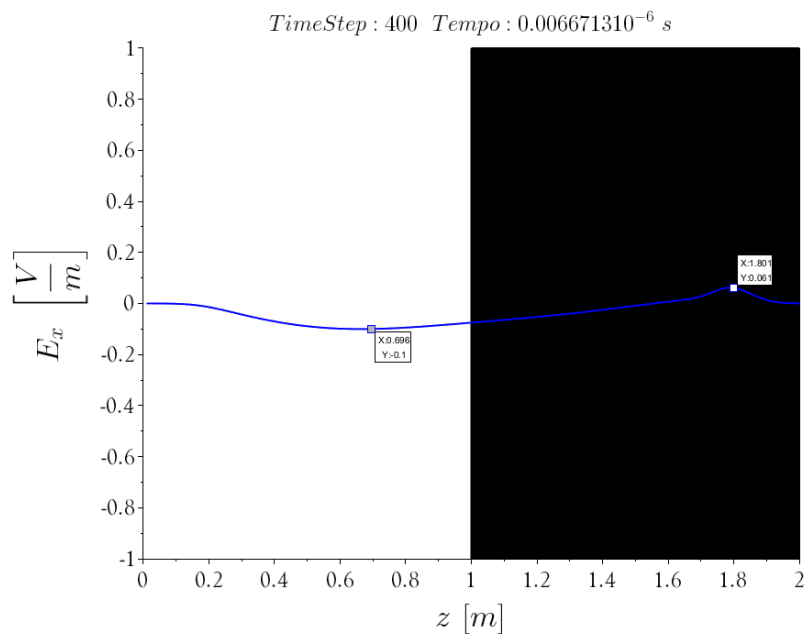
Nas Figuras 22-(a) e (b) são mostradas as simulações onde um pulso Gaussiano é gerado e percorre o espaço até atingir um meio com condutividade que aumenta linearmente com a profundidade, conforme discutido na seção 3.5.

Figura 22 – Resultado da simulação do pulso Gaussiano com a condutividade linear para os instantes:(a) 300 e (b) 400.

(a)



(b)



Fonte: Autor, 2025.

Analisando as Figuras 22-(a) e (b), observam-se as diferenças entre as amplitudes de reflexão e de absorção quando comparadas com o caso constante. Na Figura 22-(b)

demonstra-se que o campo elétrico da parcela absorvida no instante 300 tem amplitude de  $0,563 \text{ V/m}$ , o que é maior do que o valor obtido no caso anterior,  $0,098 \text{ V/m}$ .

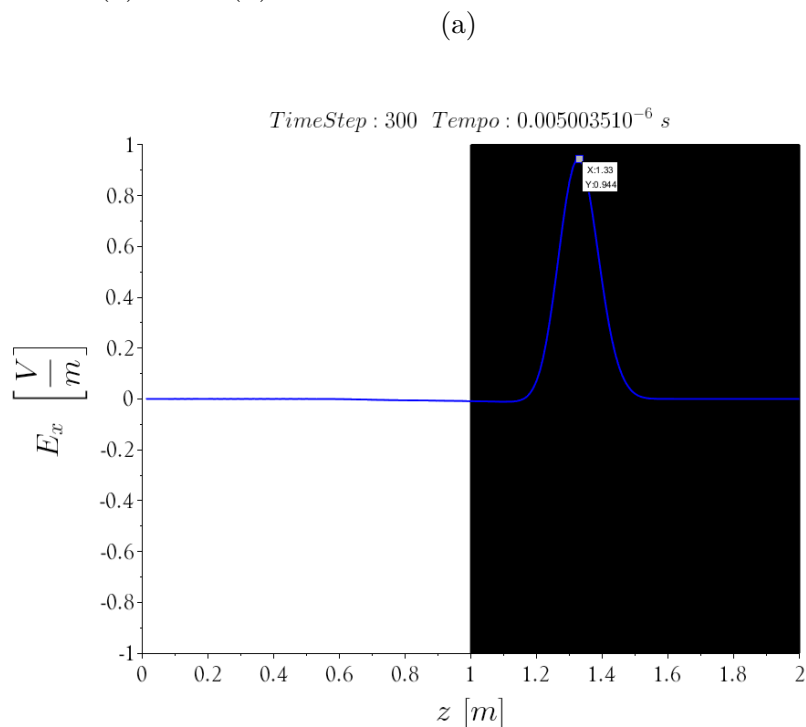
Observa-se também que a parcela refletida é mais suave e, no instante de tempo 400, seu valor de pico é de  $-0,1 \text{ V/m}$ , o que é esperado, uma vez que a mudança de condutividade não é abrupta, como no perfil constante.

Dessa forma, bem como no caso anterior, o algoritmo FDTD foi utilizado para determinar a evolução temporal da onda propagada. Visualizou-se a propagação do pulso Gaussiano, bem como a reflexão e transmissão da onda na interface entre o espaço livre e o meio com perdas com condutividade linear. Com isso, verificou-se que a parcela refletida para o meio com condutividade linear é de menor amplitude quando em comparação com o meio com condutividade constante, ao passo em que a parcela absorvida é atenuada mais lentamente.

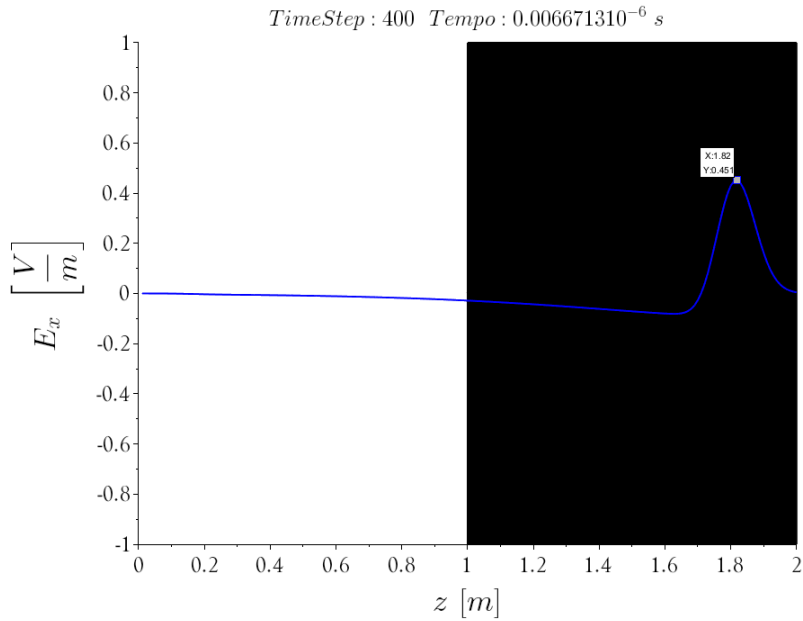
#### 4.4 Resultados da Simulação em Perfil de Condutividade Exponencial

Nas Figuras 23-(a) e (b) são mostrados os resultados da simulação onde um pulso gaussiano é gerado e percorre até atingir um meio cuja condutividade aumenta exponencialmente com a profundidade, conforme discutido na Seção 3.6.

Figura 23 – Resultado da simulação do pulso Gaussiano com a condutividade exponencial para os instantes: (a) 300 e (b) 400.



(b)



Fonte: Autor, 2025.

Na Figura 23-(a), verifica-se que a amplitude do pulso gaussiano é de 0,994  $V/m$  no instante de tempo 300, o que demonstra uma reflexão menor quando comparada com os demais casos. A parcela refletida é praticamente imperceptível, demonstrando que a reflexão obtida para o caso exponencial é quase desprezível.

Na Figura 23-(b) é mostrado que a amplitude da parcela que adentra o meio condutor é de 0,451  $V/m$  no instante de tempo 400, enquanto a parcela refletida é praticamente invisível. Isto demonstra que, em um meio com perfil exponencial, a profundidade de penetração da onda é muito maior do que a dos demais apresentados, enquanto a parcela refletida observada foi praticamente irrelevante.

Adicionalmente, este comportamento de baixa reflexão é esperado devido à variação suave da condutividade. Como abordado em Elsherbeni (2015), meios com perfis de condutividade exponencialmente variáveis são utilizados na formulação de barreiras absorventes mais complexas, como o PML (*Perfectly Matched Layer*), para garantir que reflexões não corrompam os resultados.

## 4.5 Análise de Tempo de Processamento

Para realizar uma análise do impacto das variações dos parâmetros de simulação sobre o tempo de execução do algoritmo, foram utilizados os mesmos parâmetros físicos das simulações realizadas na Seção 3.1. Os parâmetros de simulação serão alterados de modo que o espaço e tempo simulados sejam os mesmos, mas com uma resolução maior. Isto é,

será simulado um comprimento de 2 metros e o tempo máximo simulado de 8,33 *ns*, mas com valores diferentes de passo temporal e espacial. Por exemplo, caso o passo espacial seja de 0,01 metros, então o número de células deve ser de 200 unidades para que a distância simulada seja de 2 metros. Mas caso o passo espacial seja de 0,001 metros, o número de células deve ser de 20.000 unidades para manter a mesma distância simulada. O mesmo raciocínio se aplica para o tempo simulado. É importante ressaltar que, nesta seção, foi utilizado um menor valor de tempo quando comparado com as simulações das seções anteriores; o motivo disto está nos resultados de interesse para esta seção, uma vez que os valores dos campos em si não são de importância para a análise de tempo de execução.

Na tabela 5 são listados os parâmetros de simulação para os casos utilizados para comparação de tempo de processamento. Vale destacar que, ao calcular o tempo máximo e o comprimento máximo para cada caso exibido na tabela, obtém-se aproximadamente um espaço de 2 metros e um tempo simulado de 8,33 *ns*.

Tabela 5 – Parâmetros utilizados para análise do tempo de execução.

$N_c$	$N_t$	$\Delta t$ [ps]	$\Delta h$ [m]
200	500	16,68	0.01
400	1000	8,339	0,005
600	1500	5,55	0,0033
800	2000	4,17	0,0025
1000	2500	3,336	0,002
1200	3000	2,78	0,00166
1400	3500	2,388	0,001428

Fonte: Autor, 2025.

Com isso, para entender como o tempo de processamento é afetado, considere  $n_{eq}$  o número de equações a serem solucionadas para cada célula para cada instante de tempo. Desta forma, o número de equações solucionadas em uma iteração é:

$$n_{it} = N_c n_{eq}, \quad (4.1)$$

onde  $n_{it}$  é o numero de equações a serem solucionadas por iteração e  $N_c$  é o número de células. Agora, considere o valor  $R$ , a resolução da solução, este valor é um número que multiplica o número células inicial e o número de instantes de tempo, enquanto divide o valor do passo espacial. Desta forma, pode-se aumentar a resolução simplesmente atribuindo valores maiores para  $R$ , o problema se torna mais preciso, com mais células e mais instantes de tempo mas o tamanho do espaço e tempo simulados permanecem os mesmos. Por exemplo, começando o problema com 200 células, 500 instantes de tempo e passo espacial de 0,01 *m*, obtém-se:

$$N_c = 200 \cdot R, \quad (4.2)$$

$$\Delta h = 0,01/R, \quad (4.3)$$

$$N_t = 500 \cdot R. \quad (4.4)$$

Assim, a equação (4.1) torna-se:

$$n_{it} = 200Rn_{eq} \quad (4.5)$$

Com isso, o número de equações solucionadas após todas as iterações é:

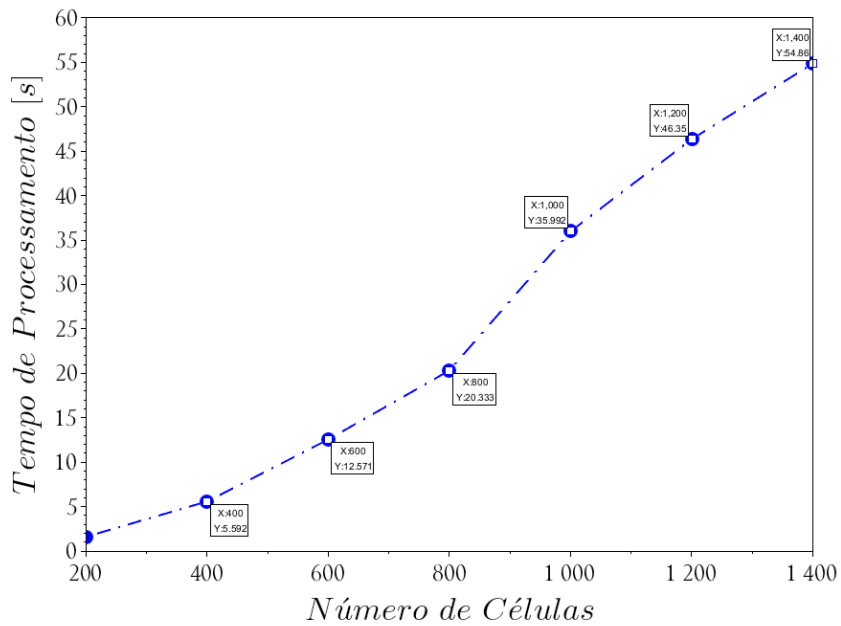
$$n_{total} = n_{it}N_t \quad (4.6)$$

$$n_{total} = 10^5 n_{eq} R^2. \quad (4.7)$$

Nota-se que esta é uma análise simples, mas o número de equações a serem resolvidas aumenta com o quadrado da resolução. Portanto, sugere-se que o tempo de execução seja impactado exponencialmente com o aumento da resolução.

Neste contexto, na Figura 24 apresentou-se um gráfico que relaciona o número de células com o tempo de execução do código.

Figura 24 – Tempo de processamento do algoritmo FDTD em função do número de células.



Fonte: Autor, 2025.

Além disso, observando a Figura 24 pode-se interpretar que apenas o número de células foi alterado no problema, o que não é verdade. Para cada número de células utilizado, os demais fatores foram ajustados conforme discutido na seção 3.7, e são descritos na Tabela 5. Com isso, nota-se que o aumento do tempo de processamento em função do número de células segue uma tendência aparentemente exponencial, mas com algumas perturbações. O real impacto do aumento da resolução sobre o tempo de execução é dificilmente medido com precisão, uma vez que os processos que ocorrem em um computador no momento da medição impactam os resultados e são difíceis de controlar. Apesar das limitações, existe uma clara tendência de crescimento do tempo de execução em função da resolução da simulação, o que reforça a importância da escolha cuidadosa de fatores como passo espacial e número de iterações.

A partir da Figura 24, constata-se que o tempo de processamento para 400 células é de 5,592 segundos, enquanto para 800 células o tempo é de 20,33 segundos, ou seja, dobrando a resolução, o tempo de processamento aumenta aproximadamente quatro vezes. Este resultado demonstra que o tempo de processamento pode facilmente atingir valores inviáveis caso não sejam feitas otimizações e escolhas cuidadosas dos parâmetros de simulação. Este problema torna-se mais evidente quando simulações com mais dimensões são realizadas. Por exemplo, em duas dimensões, o número de células aumenta com o quadrado da resolução.

Por fim, através da implementação de um algoritmo FDTD, constatou-se que o aumento da resolução da simulação leva a um aumento exponencial do tempo de execução.

## 5 Conclusão

O método FDTD demonstra ser capaz de realizar simulações que permitem a análise de problemas com elevada complexidade, os quais são difíceis de resolver por abordagens analíticas.

Ao longo deste trabalho, foi possível comparar uma solução analítica com a simulação FDTD, demonstrando a confiabilidade do método. Foi observado o impacto dos efeitos transitórios na solução numérica, que não havia sido considerado na solução analítica. Os efeitos transitórios tornam-se menos perceptíveis à medida que o tempo de simulação aumenta. Tal comportamento foi observado por meio da análise do erro percentual, na qual se observou a redução do erro percentual entre as soluções, conforme o aumento do tempo simulado.

As simulações em perfis de condutividade variável demonstraram o comportamento esperado apresentado por Griffiths (2013). A reflexão obtida no perfil constante é superior as demais; isso se deve à mudança abrupta de condutividade na interface entre os meios. Para o perfil exponencial, a parcela refletida quase não é perceptível graficamente. De fato, o meio exponencial apresentou a menor reflexão dentre os casos analisados. O perfil linear situa-se entre os meios constantes e exponenciais no que diz respeito à onda refletida.

A respeito da onda absorvida, o meio constante atenuou a onda mais rapidamente do que os demais, o que está de acordo com o esperado, uma vez que o valor de condutividade máxima é apresentado desde o início do material. O perfil exponencial apresentou a menor atenuação da onda, enquanto o perfil linear encontra-se entre os demais.

Estes resultados sugerem que materiais com mudanças suaves de condutividade tem menor capacidade de reflexão de ondas eletromagnéticas no que diz respeito à condutividade. Ao passo que materiais com mudanças abruptas demonstram-se mais propensos à reflexão.

O tempo de execução do algoritmo apresentou um aumento exponencial com a resolução da simulação. Isto reforça o cuidado necessário na formulação do problema e a escolha consciente do passo espacial, do passo temporal, da quantidade de instantes de tempo e do tamanho do espaço simulado.

Além disso, os resultados obtidos corroboram a eficácia das simulações realizadas utilizando o método FDTD, demonstrando a aplicabilidade do método em problemas reais com parâmetros variáveis.

### 5.1 Estudos Futuros

Os estudos realizados ao longo deste trabalho evidenciam algumas limitações. As simulações apresentadas foram realizadas em uma dimensão espacial, o que limita a quantidade de aplicações reais. Diante disso, são propostos estudos em torno do método FDTD em duas ou três dimensões, envolvendo perfis com condutividade variável em todas as

direções, bem como a variação espacial da permissividade elétrica e da permeabilidade magnética.

Os passos espacial e temporal, determinados neste trabalho pela convenção apresentada por Taflove e Hagness (2005), mostraram-se impactantes no tempo de execução. Devido a isso, recomenda-se uma análise mais detalhada para a determinação desses parâmetros, com o intuito de otimizar o tempo de execução, garantir a estabilidade e reduzir erros.

Por fim uma análise do tempo de execução mais detalhada também é desejada em estudos posteriores, bem como o monitoramento do consumo de recursos computacionais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSUNAIDI, M. A. **FDTD analysis of microstrip patch antenna on ferrite substrate**. Microwave and Optical Technology Letters, v. 50, n. 9, p. 2374–2379, 2008.

BAUDIN, Michaël. **Programming in Scilab**. 2011.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos numéricos para engenharia**. 7. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

CHOROSZUCHO, Agnieszka; SZCZEGIELNIAK, Tomasz; KUSIAK, Dariusz; JASKOT, Anna. **Application of the FDTD Method to the Analysis of Electromagnetic Wave Propagation in Systems with Concrete and Reinforced Concrete**. Energies, Basel, v. 17, n. 24, p. 6252, 2024. DOI: 10.3390/en17246252.

COSTEN, F.; BÉRENGER, J. P.; BROWN, A. K. **Comparison of FDTD Hard Source With FDTD Soft Source and Accuracy Assessment in Debye Media**. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, v. 57, n. 7, p. 2080–2085, July 2009. DOI: 10.1109/TAP.2009.2024572.

ELSHARBENI, Atef Z.; DEMIR, Veysel. **The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics with MATLAB Simulations**. 2. ed. Raleigh: Scitech Publishing, 2015.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo numérico**. Pearson, 2006.

G. Turnbull. **Maxwell's equations [Scanning Our Past]**. Proceedings of the IEEE, v. 101, n. 7, p. 1801–1805, July 2013.

GRIFFITHS, David J. **Introduction to Electrodynamics**. 4. ed. Boston: Pearson, 2013.

HAGNESS, S. C.; TAFLOVE, A.; BRIDGES, J. E. **FDTD modeling of a coherent-addition antenna array for early-stage detection of breast cancer**. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, n. 1, p. 2–5, 1998.

HOLLAND, R. **THREDS: A finite-difference time-domain EMP code in three dimensions**. IEEE Transactions on Nuclear Science, v. 30, n. 6, p. 4589–4591, 1983.

PEREDA, José A.; GARCÍA, Oscar; VEGAS, Angel; PRIETO, Andrés. **Numerical dispersion and stability analysis of the FDTD technique in lossy dielectrics**. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, v. 8, n. 7, p. 245–247, July 1998.

SADIKU, Matthew N. O. **Elementos de Eletromagnetismo**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2016.

SCILAB Team. **About Scilab – What is Scilab?** Disponível em: <https://www.scilab.org/about>.

SILVA, Cíntia Arantes. **Aplicação do método das diferenças finitas no domínio do tempo para determinação do comportamento dinâmico de eletrodos de aterramento**. 2019.

SULLIVAN, Dennis M.; HOULE, Jennifer E. **Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method with Python**. 3. ed. Hoboken: Wiley-IEEE Press, 2020.

TAFLOVE, A.; HAGNESS, S. C. **Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method**. 3. ed. Boston: Artech House, 2005.

TAFLOVE, Allen; BRODWIN, Morris E. **Numerical Solution of Steady-State Electromagnetic Scattering Problems Using the Time-Dependent Maxwell's Equations**. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, v. 23, n. 8, p. 623–630, 1975.

YANG, Ling; WANG, Guoan; WU, Zhigang; ZHANG, Ruixuan. **The Influence of Building Materials and Electrical Parameter Variability on Electromagnetic Wave Propagation**. Energies, Basel, v. 17, n. 23, p. 5934, 2024. DOI: 10.3390/en17235934.

YEE, Kane S. **Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media**. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, v. 14, n. 3, p. 302–307, 1966.