

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MINAS  
GERAIS – *CAMPUS* BETIM  
BACHARELADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Gilson de Oliveira Amaral

ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA EM BALANÇO EXCITADA POR UM  
CARREGAMENTO PERIÓDICO

Betim  
2022

GILSON DE OLIVEIRA AMARAL

ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA EM BALANÇO EXCITADA POR UM  
CARREGAMENTO PERIÓDICO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica do Instituto Federal de Minas Gerais - *Campus* Betim como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Evanilton José Alves Barbosa

Betim  
2022

## FICHA CATALOGRÁFICA

A485a Amaral, Gilson de Oliveira

Análise dinâmica de uma viga em balanço excitada por um carregamento periódico / Gilson de Oliveira Amaral. – 2022. 49 f.: il.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais, Câmpus Betim, 2022.

Orientação: prof. Evanilton José Alves Barbosa.

1. Análise estrutural (Engenharia). 2. Vigas. 3. Mecânica dos sólidos. 4. Vibração. I. Gilson de Oliveira Amaral. II. Título.

CDU: 624

GILSON DE OLIVEIRA AMARAL

ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA EM BALANÇO EXCITADA POR UM  
CARREGAMENTO PERÍODICO

Trabalho de conclusão de curso  
apresentado ao Curso de Engenharia  
Mecânica do Instituto Federal de Minas  
Gerais Campus Betim como requisito  
parcial para à obtenção do grau de  
Bacharel em Engenharia Mecânica.

Betim, 12 de julho de 2022.

BANCA EXAMINADORA



---

Prof. Evanilton José Alves Barbosa  
DMEC – IFMG Campus Betim



---

Prof. Bruno de Souza Baptista  
DMEC – IFMG Campus Betim



---

Prof. Felipe Augusto Rocha da Silva  
DMEC – IFMG Campus Betim

## Agradecimentos

“Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do céu.” (Eclesiastes 3:1). “Tempo de buscar, e tempo de perder; tempo de guardar, e tempo de lançar fora;” (Eclesiastes 3:6)

Passados muitos anos de uma primeira graduação em Ciências Contábeis, profissão que exerço com muita satisfação e orgulho, concluo aqui o bacharelado em Engenharia Mecânica, graduação que originalmente planejei me formar, mas quis Deus que meus caminhos fossem diferentes e estou imensamente feliz por isso. Que seja feita sempre a vontade de Deus Pai Todo Poderoso em nossas vidas, pois ainda que não entendamos, sempre será o melhor para todos nós.

Agradeço a Deus, que se fez homem por intermédio de Jesus Cristo para nos redimir na cruz e que em sua infinita misericórdia me permitiu chegar até aqui, ainda que como pecador eu não mereça. Sem Deus nada teria, nada seria.

Agradeço a minha amada esposa, Polyany Cunha, que sempre me apoiou e me incentivou a buscar novas conquistas, as quais eu nem imaginava que ainda pudesse alcançar. Escrevo aqui sem medo de errar que sem você eu não teria nem iniciado, muito menos concluído. Obrigado pela enorme paciência, por entender os inúmeros planos frustrados de férias e de feriados prolongados em função de trabalhos acadêmicos como este que agora concluo.

Agradeço a minha Mãe pela disciplina, cuidado, incentivo e apoio e a meu Pai que me educou no exemplo e me ensinou os caminhos do mundo.

Agradeço a todos da família de minha esposa por me aceitarem como membro legítimo com tanto carinho, apoio, incentivo, compreensão e que tanto torceram e me “arretaram” por esta graduação.

Agradeço aos irmãos do grupo de oração da Congregação Presbiteriana do Gurugi em Jaboatão dos Guararapes – PE que mesmo em meio a pandemia, estiveram comigo e com minha esposa em cultos de oração on-line, sempre nos apoiando e orando pelas nossas vidas profissionais e pessoais.

Agradeço a meu orientador Prof. Evanilton Barbosa, aos alunos da Eng. Mecânica que “sofreram” juntos comigo e a todos os dedicados Docentes, servidores técnicos e administrativos do IFMG – campus Betim, que mesmo com todas as dificuldades impostas por nossos péssimos políticos, conseguiram criar um curso de Engenharia de excelência com nota máxima no MEC, do qual tive o orgulho de fazer parte como discente.

Agradeço aos meus amigos e amigas que compreenderam meu distanciamento dos muitos eventos sociais que não pude participar e pelas alegrias naqueles em que estive presente, permitindo uma importante renovação de energias.

“Consagre ao Senhor tudo o que você faz, e os seus planos serão bem-sucedidos.” (Provérbios 16:3)

## Resumo

A abordagem inicial em engenharia para dimensionamento de estruturas parte da concepção de carregamentos estáticos. A apreciação de carregamentos dinâmicos ocorre em um segundo momento, mas nem sempre essencialmente de maneira dinâmica, uma vez que é comum acrescentar fatores de amplificação dinâmica na análise estática como alternativa a um ensaio mais detalhado. Em muitas situações tal alternativa é extremamente efetiva, em especial em estruturas com carregamentos, cuja variação em função do tempo é lenta ou que tenham ações dinâmicas muito inferiores às ações estáticas, quase sendo possível desprezá-las. Entretanto, quando nos deparamos com estruturas submetidas a ações que variam com o tempo, seja em magnitude, direção ou posição, tais como impactos, vibrações, variações repentinas de cargas, relacionadas a forças potenciais ou cinéticas, faz-se necessário ir além do estudo estático. Através da análise dinâmica se estuda o deslocamento de um corpo em função do tempo, que tem como objetivo, determinar os deslocamentos, velocidades e acelerações de todos os elementos constituintes de uma estrutura submetida a cargas dinâmicas. Por meio da revisão bibliográfica sobre o tema, aliada à aplicação com dados hipotéticos de carregamento de uma viga em balanço excitada por um carregamento periódico, restou demonstrado a necessidade de uma análise completa das estruturas, considerando os elementos estáticos e dinâmicos.

Palavras chaves: Análise estrutural, mecânica dos sólidos, carregamento estático, carregamento dinâmico, força de excitação senoidal, vibração.

## Lista de figuras

Figura 1 – Mola tracionada.....	14
Figura 2 – Força aplicada x deformação obtida .....	15
Figura 3 – Representação gráfica da ação harmônica simples.....	16
Figura 4 - Gráfico de ação periódica da força em função do tempo.....	17
Figura 5 - Gráfico de ação transiente da força em função do tempo.....	17
Figura 6 – Representação do deslocamento de uma partícula sobre uma circunferência.....	20
Figura 7 – Representação gráfica de vibrações livre e forçada.....	24
Figura 8 – Ponte Tacoma Narrows pós colapso.....	27
Figura 9 - Curvas de amplificação de amplitudes de vibração. ....	28
Figura 10 - Graus de liberdade no espaço tridimensional. ....	29
Figura 11 - Sistema vibracional amortecido .....	31
Figura 12 - Viga em balanço .....	36
Figura 13 - Deslocamentos em função do tempo.....	41
Figura 14 - Tensão em função do tempo .....	42
Figura 15 - Gráfico de Amplificação Dinâmica .....	42
Figura 16 - Tensão dinâmica x relação de frequências.....	43

## Lista de tabelas

Tabela 1 - Dados do Carregamento .....	37
Tabela 2 - Fatores de amplificação .....	43
Tabela 3 - Tensão dinâmica em kgf/mm <sup>2</sup> .....	44

## SUMÁRIO

1. Introdução .....	9
2. Objetivos .....	12
2.1 Objetivo geral .....	12
2.2 Objetivos específicos .....	12
3. Revisão Bibliográfica .....	13
3.1 Carregamento estático .....	13
3.2 Lei de Hooke .....	14
3.3 Dinâmica das estruturas.....	15
3.4 Carregamento dinâmico .....	17
3.5 Segunda Lei de Newton .....	18
3.6 Carregamento de impacto .....	19
3.7 Carregamento senoidal .....	19
3.8 Vibração .....	23
3.9 Frequência natural .....	25
3.10 Ressonância.....	26
3.11 Graus de liberdade.....	29
3.12 Equação do movimento com um grau de liberdade .....	30
4. Aplicação.....	36
5. Resultados .....	41
6. Conclusão .....	45
7. Referências bibliográficas .....	46

## 1. Introdução

Os deslocamentos, as deformações e as tensões atuantes em elementos de estrutura e componentes mecânicos em geral são inicialmente analisados de forma estática, a fim de avaliar e/ou validar a resistência mecânica das estruturas quando submetidas a esforços diversos.

Segundo Hibbeler (2011), o equilíbrio de um corpo exige uma igualdade numérica entre forças ativas e reativas, para impedir a translação ou um movimento acelerado do corpo ao longo de uma trajetória reta ou curva, e um equilíbrio de momentos, para impedir que o corpo gire.

Essas condições podem ser expressas matematicamente pelas seguintes equações vetoriais:

Força resultante nula:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (01)$$

Momento resultante nulo:

$$\sum \vec{M} = 0 \quad (02)$$

A soma das forças representa a resultante de todas as forças atuantes sobre um corpo. Quando a resultante dessas forças é nula tem-se o equilíbrio.

Esta condição é a principal característica do equilíbrio de um ponto material, condição essa que ocorre em relação às forças atuantes sobre uma partícula que tenha dimensões mínimas, de forma a sofrer apenas movimentos de translação. Consequentemente, para que se tenha o equilíbrio torna-se necessário apenas satisfazer a igualdade das forças atuantes.

Entretanto, conceitualmente, um corpo extenso é constituído por um conjunto de pontos materiais e por consequência, além do movimento de translação, tal corpo estará sujeito também ao movimento de rotação, decorrente do momento de uma força ou torque.

Hibbeler (2011), assim define o momento de uma força:

Quando uma força é aplicada a um corpo, ela produzirá uma tendência de rotação do corpo em torno de um ponto que não está na linha de ação da força. Essa tendência de rotação algumas vezes é chamada de torque, mas normalmente é denominada momento de uma força, ou simplesmente momento.

O equilíbrio decorrente da soma dos momentos ( $\sum M$ ), ocorre quando a soma algébrica é igual a zero, logo, o equilíbrio estático é assegurado, devido a inexistência do movimento rotacional. Uma vez que o corpo esteja em equilíbrio, a premissa para aplicação dos fundamentos de uma análise estática, está assegurada, no entanto, essa condição de análise, não incorpora as diversas situações impostas às estruturas, devido a características distintas dos mais diversos tipos de carregamentos, razão pela qual torna-se necessário definir parâmetros para a aplicação de outras metodologias de análises, como por exemplo a análise dinâmica. Este tipo de avaliação leva em conta o estudo de estruturas submetidas a ações de carregamentos/eventos que variam com o tempo, seja em magnitude, direção ou posição, tais como impactos, vibrações, variações repentinas de cargas/forças de inércia, chamados carregamentos dinâmicos (ALVES FILHO, 2008).

Tais estruturas necessitam que seu dimensionamento seja realizado considerando forças muito distintas daquelas estudadas na análise estática. É fundamental sabermos como se dá a atuação das forças aplicadas ao longo do tempo, sendo este o fator determinante para a viabilidade da aplicação da análise estática ou a necessidade da análise dinâmica.

Considerando uma aplicação de cargas e esforços feita de maneira lenta, com velocidades desprezíveis, é razoável não levar em conta o aparecimento de forças de inércia. Com isso, a análise dessas estruturas é feita de forma quase estática, onde na maioria das vezes desconsidera-se o efeito dos movimentos sobre o equilíbrio (análise estática). De outra forma, devemos considerar resultados de movimentos oscilatórios em torno da configuração inicial da estrutura projetada com efeitos que podem ser indesejados. Esses movimentos podem levar a reações e esforços internos solicitantes maiores que os determinados estaticamente [...] (FERRO, 2014).

São, portanto, características determinantes para a aplicação da análise dinâmica (FERRO, 2014):

- Presença de cargas, reações, deslocamentos e esforços internos variando, de maneira não desprezível, em função do tempo e da velocidade;
- Existência de forças de inércia em função da massa da estrutura e forças que dissipem energia por meio de amortecimento.

Enquanto na análise estática as cargas, reações e esforços internos tendem a se equilibrar, tendo equações algébricas como modelo matemático, na análise dinâmica as forças de inércia e o amortecimento participam igualmente do equilíbrio, tendo o tempo um papel fundamental e equações diferenciais como modelo matemático. Ainda que tenhamos inúmeros softwares com a tecnologia CAE, no qual as estruturas podem ser dimensionadas considerando todos os esforços previstos, sejam eles estáticos ou dinâmicos, a base conceitual permanece indispensável para um correto dimensionamento e interpretação de resultados (ALVES FILHO, 2008).

Neste contexto, o presente estudo, através da revisão bibliográfica, apresenta os principais conceitos relacionados à dinâmica das estruturas e sua aplicação com dados hipotéticos de uma viga em balanço excitada por um carregamento periódico, demonstrando, assim, a necessidade de uma detalhada análise dinâmica das estruturas.

## **2. Objetivos**

### **2.1 Objetivo geral**

O presente estudo tem por objetivo analisar o carregamento de uma viga engastada, submetida a um carregamento periódico, considerando uma quantidade mínima de hipóteses, de forma estática e dinâmica.

### **2.2 Objetivos específicos**

- Apurar as principais diferenças entre a análise estática e a análise dinâmica;
- Compreender os princípios, fundamentos, tipos de carregamentos e aplicação da análise dinâmica;
- Analisar os tipos de cargas dinâmicas e suas respostas;
- Compreender a importância dos graus de liberdade de um sistema mecânico;
- Conceituar e aplicar o carregamento senoidal em uma viga engastada submetida a um carregamento periódico com um grau de liberdade.
- Aplicação de conceitos através de dados hipotéticos de carregamento de uma viga em balanço excitada por um carregamento periódico.

### 3. Revisão Bibliográfica

Nesta seção serão tratados individualmente os principais conceitos do carregamento dinâmico, tendo como ponto de partida o carregamento estático, uma vez que ambos são complementares. A correlação dos conceitos aqui apresentados se faz presente na aplicação com dados hipotéticos de carregamento de uma viga em balanço excitada por um carregamento periódico, a ser apresentada no item 4.

#### 3.1 Carregamento estático

Considera-se carregamento estático todo carregamento cuja carga aplicada, seja por uma força estacionária ou momento aplicado, permanece sem variações de intensidade ao longo do tempo, ou seja, de maneira imutável em magnitude, em ponto de aplicação e em direção.

A ausência de movimento, de acordo com a segunda lei de Newton, define que a aceleração destes sistemas é inoperante, uma situação em que todas as forças que atuam sobre um corpo se equilibram. Portanto, a soma vetorial de todas as forças que agem sobre o corpo deve ser nula.

O carregamento estático atua tanto em corpos extensos, quanto em pontos materiais. A dessemelhança reside nas dimensões, de forma que um corpo extenso será aquele que possuirá tamanho capaz de intervir no estudo, enquanto o ponto material possuirá tamanho que poderá ser desconsiderado. Quando um corpo se encontra em repouso o seu equilíbrio é classificado como estático e estando o corpo em movimento retilíneo uniforme, seu equilíbrio é classificado como dinâmico.

Mendonça (2006) ressalta que a classificação de problemas em estático ou dinâmico nem sempre é simples e direta. Mesmo que o carregamento varie com o tempo não necessariamente se tem um problema dinâmico.

Alves Filho (2008) esclarece que um carregamento é considerado estático não apenas na completa ausência de movimento, mas também em carregamentos que possuam cargas agindo estaticamente. Em estruturas carregadas lentamente, ainda que a carga gere movimentos na estrutura e varie com o tempo, a resposta pode ser calculada em cada instante de tempo de maneira estática, se assemelhando a uma fotografia a cada variação.

### 3.2 Lei de Hooke

A lei de Robert Hooke determina o comportamento de uma mola quando comprimida ou alongada através do sentido e do módulo da força aplicada, resultando na seguinte equação matemática:

$$F = -k \cdot x \quad (03)$$

Onde:

F = força aplicada (N)

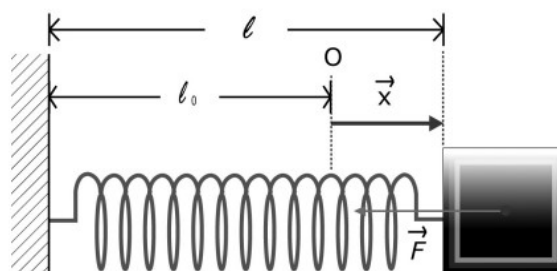
k = constante elástica (N/m)

x = deformação da mola (m)

Sempre que uma mola é deformada por uma força externa, uma força restauradora de mesma direção e sentido oposto passa a atuar de maneira proporcional ao tamanho da deformação sofrida.

A constante elástica é a medida de rigidez da mola, ou seja, trata-se da força necessária para deformar a mola, seja esticando-a ou comprimindo-a. A deformação ou alongação consiste na variação do comprimento da mola, ou seja, a diferença entre o comprimento inicial ( $\ell_0$ ) e o comprimento final da mola ( $\ell$ ), conforme figura 1.

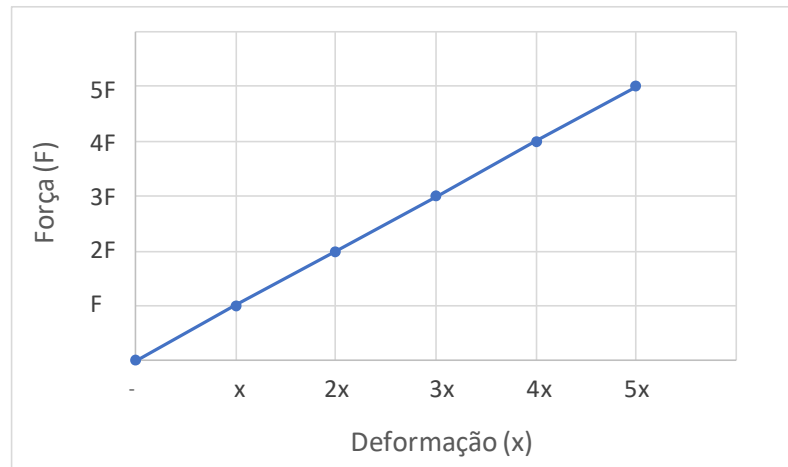
Figura 1 – Mola tracionada



Fonte: Sales, 2011.

Na figura 2 temos a representação gráfica da relação entre a força aplicada e a deformação obtida. Considerando um corpo, inicialmente sem ação de nenhuma força, vemos que à medida que a força exercida na mola aumenta, a deformação também aumenta proporcionalmente à força aplicada.

Figura 2 – Força aplicada x deformação obtida



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

A lei de Hooke também se aplica às estruturas, pois estas possuem elasticidade, comportando-se como se fossem uma mola quando submetidas a deformações elásticas. Cessada ou diminuída a força aplicada, a estrutura retorna à posição inicial. Portanto, assim como ocorre com as molas, as forças deformantes são diretamente proporcionais ao produto das deformações elásticas produzidas e à constante elástica relacionada com as características dos materiais da estrutura (ALVES et al., 2017).

### 3.3 Dinâmica das estruturas

A análise dinâmica tem por objetivo quantificar a ocorrência de movimentos, velocidades, acelerações, esforços, vibrações e tensões nas estruturas, em função do tempo, destacando-se três tipos de forças mais recorrentes (BEER et al., 2010):

- Força restauradora: como o próprio termo sugere, age sobre a estrutura de forma a retorná-la à sua posição inicial, sendo diretamente proporcional ao deslocamento e é descrita pela Lei de Hooke;
- Força dissipativa: gerada pela perda (dissipação) de energia em decorrência do atrito interno quando do retorno da estrutura à posição inicial;

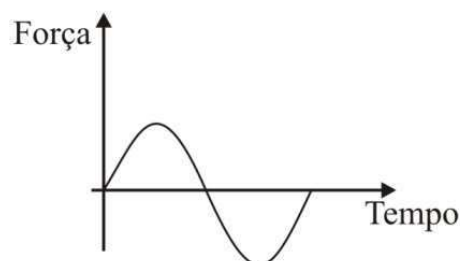
- Força de inércia: vem da tendência natural de um objeto em resistir às alterações em seu estado original de repouso ou movimento até que uma força atue sobre o corpo, tendo como princípio a primeira Lei de Newton.

As ações dinâmicas atuantes podem ser classificadas em: determinísticas ou não determinísticas. Quando o valor e a magnitude da ação atuante sobre a estrutura são completamente conhecidos ao longo do tempo, tal ação pode ser classificada como determinística. Por outro lado, considera-se a ação não determinística, randômica ou estocástica, quando há uma indeterminação desses fatores em qualquer instante de tempo futuro (RAO, 2008).

As análises de ações dinâmicas podem também ser realizadas em função do tempo ou da frequência, sendo que, em análises não lineares, o estudo em função do tempo é tradicionalmente mais aplicado e preferível, sendo classificadas em harmônicas, periódicas e transientes (CLOUGH e PENZIEN, 1995).

A ação é dita harmônica quando sua variação no tempo pode ser representada por uma função seno ou cosseno, produzindo o mais simples movimento oscilatório, caracterizado por repetidos movimentos em intervalos de tempos (períodos) iguais em torno de uma posição de equilíbrio (ilustrado na figura 3), podendo ser chamado também de oscilação senoidal (BATELO, 2014).

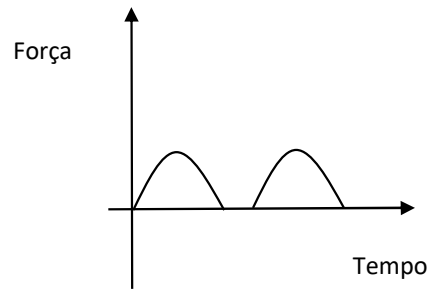
Figura 3 – Representação gráfica da ação harmônica simples



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

A ação periódica tem por característica apresentar repetições em um intervalo de tempo regular, determinado como período, sendo este o tempo necessário para conclusão de um ciclo, como representado na figura 4 a seguir.

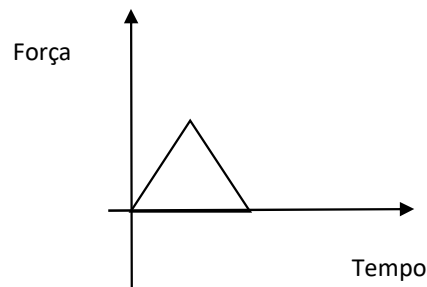
Figura 4 - Gráfico de ação periódica da força em função do tempo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

Ações transientes ou não periódicas são aquelas cuja variação se apresenta de forma arbitrária ao longo do tempo, ou seja, sem periodicidade ou frequências definidas. Carregamentos impulsivos podem também ser caracterizados como transientes, dada sua duração muito curta, conforme ilustrado na figura 5.

Figura 5 - Gráfico de ação transiente da força em função do tempo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

### 3.4 Carregamento dinâmico

Segundo Alves Filho (2008), o carregamento é dinâmico quando sua magnitude, direção e posição variam ao longo do tempo. Como consequência, as respostas em termos de deslocamento, velocidade e aceleração também irão variar ao longo do tempo.

Analisar estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos requer a quantificação do carregamento representativo da excitação dinâmica, a energia necessária para dissipar a excitação e a determinação da causa e efeito. Tal complexidade faz com que muitas vezes engenheiros optem por considerar hipóteses de carregamentos estáticos majorados para suprir os efeitos dinâmicos (RIMOLA, 2010).

Os efeitos dinâmicos induzidos pelas cargas móveis podem ser levados em conta em forma simples na análise estrutural, multiplicando-se a resposta estática da estrutura por um coeficiente de majoração (C.M.D.). Esse coeficiente é geralmente definido como a relação entre a resposta dinâmica máxima e a resposta estática correspondente à posição mais desfavorável das cargas. (CARBONARI, 1989, p.220).

Entretanto, Ferro (2014) ressalta que o uso de fatores de amplificação dinâmica não resulta no adequado dimensionamento dessas estruturas, pois a análise dos efeitos das cargas dinâmicas em muito se difere da análise dos efeitos da carga estática.

Andrade (2009) ressalta a importância de estudos para compreensão dos carregamentos dinâmicos:

Estudos sobre o comportamento dinâmico de estruturas não lineares são até os dias de hoje motivo de extensas pesquisas em todo o mundo. Desde o início do desenvolvimento da teoria das oscilações não lineares buscou-se compreender os mecanismos básicos, como perturbações que provocassem respostas complexas nas estruturas flexíveis.

A Dinâmica é a parte da mecânica que busca identificar as condições necessárias à realização de movimento e os seus possíveis efeitos em um determinado corpo, relacionando as forças atuantes com o movimento, tanto do corpo como um todo quanto de suas partes relativamente umas às outras. As equações que representam este movimento em velocidades não relativísticas são as leis do movimento de Newton. (MENDONÇA, 2006).

### 3.5 Segunda Lei de Newton

Conforme a segunda lei de Newton, um corpo sujeito a uma ação de uma força resultante não nula terá uma aceleração na mesma direção e no mesmo sentido da força, força essa que será igual ao produto de sua massa pela aceleração, resumindo-se na seguinte equação matemática:

$$\vec{F}_r = m\vec{a} \quad (04)$$

Onde:

$F_r$  = força resultante

$m$  = massa do corpo

$a$  = aceleração

Em outras palavras, a aceleração do corpo será diretamente proporcional à força resultante aplicada ao corpo e inversamente proporcional à sua massa.

Um corpo pode estar submetido a forças atuantes de diferentes ou iguais módulos, direções e sentidos, razão pela qual utiliza-se a força resultante para a devida compreensão e aplicação da segunda lei de Newton.

### **3.6 Carregamento de impacto**

Carregamento de impacto é um tipo de carregamento dinâmico no qual a taxa de carregamento ocorre de forma quase instantânea, e as forças de amortecimento não conseguem dissipar uma quantidade significativa de energia (BATELO, 2014).

Segundo Ferro (2014), a resposta de uma estrutura a carregamentos de impacto depende da variação da força de impacto em função do tempo e da duração da carga em comparação ao período das vibrações naturais da estrutura.

A magnitude das ações dinâmicas e sua relação com o tempo dependem do tipo de excitação que será aplicada ao sistema e das propriedades dinâmicas do corpo. Importante destacar que vários materiais demonstram um comportamento maleável quando sujeitos a carregamento estático, mas podem apresentar um comportamento frágil quando submetidos a cargas de impacto. Este comportamento é devido à impossibilidade da redistribuição de tensões durante um período muito curto de deformação.

### **3.7 Carregamento senoidal**

O carregamento senoidal é aquele cuja força propulsora varia periodicamente com o tempo, provocando deslocamentos cuja equação do movimento é uma senoide, ou seja, em forma de onda senoidal. Ondas senoidais são

bastante comuns na natureza, como por exemplo os movimentos pendulares, as ondas do mar, a propagação do som e da luz, entre outros, sendo esta a forma mais eficiente de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica (SILVA JR., s.d.)

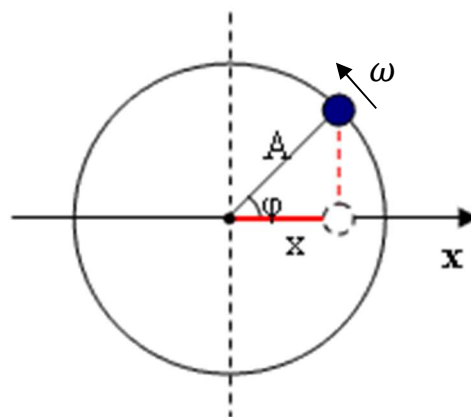
Alves Filho (2008) ressalta a importância do estudo dos efeitos do carregamento senoidal e destaca que havendo diversos carregamentos senoidais, o comportamento sobre a estrutura pode ser obtido por superposição de carregamentos senoidais individuais.

As equações senoidais possuem valor médio nulo, cuja variável é diretamente proporcional ao seno ou cosseno de outra variável, produzindo uma curva em forma de onda, graficamente representado na figura 3. O Movimento Harmônico Simples – MHS é o tipo mais comum de equação senoidal, caracterizado por movimentos repetidos em intervalos de tempos e por isso também conhecido como periódico (RAO, 2008).

O MHS pode ser comparado ao Movimento Circular Uniforme – MCU, pois uma volta completa de uma partícula no MCU, quando projetado na vertical ou horizontal equivale ao movimento de vaivém sobre um segmento de reta que se repete em intervalos de tempos iguais, realizando assim um MHS.

Partindo dos conhecimentos do MCU, podemos deduzir as funções horárias do deslocamento, velocidade e aceleração no MHS, tendo como ponto de partida a figura 6.

Figura 6 – Representação do deslocamento de uma partícula sobre uma circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

Da relação trigonométrica do cosseno do ângulo  $\varphi$  obtemos a posição exata em que se encontra a partícula representada na figura 6, dada por:

$$x = A. \cos\varphi \quad (05)$$

Onde:

$x$  = elongação

$A$  = amplitude

$\varphi$  = ângulo de fase

No MCU o ângulo varia com o tempo, tornando necessária a utilização da função horária do deslocamento angular dada por:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega. t \quad (06)$$

Da substituição dos termos da equação 06 na equação 05 obtemos a função horária da elongação, com a qual podemos calcular a posição da partícula que descreve um MHS no instante  $t$ .

$$x(t) = A. \cos (\varphi_0 + \omega. t) \quad (07)$$

$x$  = elongação

$A$  = amplitude

$\varphi_0$  = ângulo de fase inicial (com  $t = 0$ )

$\omega$  = pulsação no MHS (velocidade angular no MCU)

$t$  = tempo (instante do movimento)

Sabendo que a função horária da elongação nos fornece a posição da partícula em função do tempo, podemos obter também as funções da velocidade e da aceleração através da primeira e segunda derivadas da posição, respectivamente, dadas pelas equações (08) e (09):

$$v(t) = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\varphi_0 + \omega \cdot t) \quad (08)$$

$$a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{cos}(\varphi_0 + \omega \cdot t) \quad (09)$$

Aplicam-se ao MHS os mesmos conceitos da Lei de Hooke para resolução de problemas, conforme destaca (KNIGHT, 2009):

(...) em certo sentido, resolvemos todos os problemas de movimento harmônico simples ao resolvermos o problema da mola horizontal. (...) Uma força restauradora que seja diretamente proporcional ao deslocamento a partir da posição de equilíbrio é chamada de força restauradora linear. Para qualquer força restauradora linear, a equação de movimento é idêntica à equação da mola (a não ser, talvez, pelo emprego de símbolos diferentes). Conseqüentemente, qualquer sistema com força restauradora linear descreverá um movimento harmônico simples em torno da posição de equilíbrio. É por isso que uma mola em oscilação é o protótipo do MHS. Tudo que aprendemos sobre uma mola oscilando se aplica às oscilações produzidas por qualquer outra força restauradora linear, desde as vibrações das asas de um avião aos movimentos de elétrons em circuitos elétricos.

Alves Filho (2008) cita o fenômeno da vibração como um dos principais tipos de carregamento senoidal, uma vez que a característica oscilatória desse fenômeno, aliado ao decaimento oriundo do amortecimento, são representados por uma função senoidal, cujo movimento é transiente.

Segundo Silva (2009), a forma mais simples de excitação em sistemas mecânicos é a força harmônica, também denominada força de excitação senoidal, obtida pela equação:

$$F(t) = F_0 \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (10)$$

Onde:

$F_0$  = força de excitação ou força equivalente

$\omega$  = frequência de excitação

t = tempo

### 3.8 Vibração

A análise de estruturas submetidas a ações dinâmicas, entre elas vibrações causadas por fatores diversos, é cada vez mais importante e necessária, uma vez que tais estruturas estão cada vez mais submetidas a carregamento de equipamentos mecânicos, atualmente. (FERRO; FERREIRA e CALENZANI, 2014). Nesta seara, a teoria das vibrações tem como princípio o estudo dos movimentos oscilatórios de corpos e as forças envolvidas nessa dinâmica (FERREIRA e CHIARELLO, 2016).

A origem de um processo vibratório pode ocorrer em função da característica operacional de uma máquina, a qual executa uma atividade podendo causar forças de impacto, como martelo de forjas e prensas, forças periódicas geradas por motores de pistão, máquinas rotativas de alta velocidade como turbinas e compressores, dentre outras. A rotação de operação é fator determinante, e são definidas como de baixa a média rotação (até 500 rpm), de média a alta (500 a 1000 rpm) e alta rotação (superior a 1000 rpm). (DALBONE e SANCHES FILHO, 2011).

As vibrações podem ser consideradas como quaisquer movimentos oscilatórios de um corpo em torno de um ponto fixo, podendo ser de caráter longitudinal, flexional ou torcional, sendo esse movimento classificado segundo sua amplitude, frequência, comprimento de onda, velocidade e meio de propagação (ALEANDRI et al., 2013).

Segundo Soeiro (2008), a elasticidade, a inércia e o amortecimento são as propriedades mais importantes dos sistemas mecânicos no estudo das vibrações, pois a energia mecânica é manipulada através dessas propriedades.

A vibração é um processo de troca de energia mecânica, nas formas de energia cinética (associada à velocidade) e energia potencial (relacionada à deformação e à gravidade). A inércia corresponde à capacidade de armazenamento de energia cinética e energia potencial gravitacional, enquanto a energia potencial tem sua armazenagem ligada à capacidade de elasticidade do material. Portanto, a vibração de um sistema consiste na conversão de energia cinética em potencial e vice-versa.

Sistemas vibratórios podem ser discretos, podendo ser subdivididos em partes menores com determinados números de graus de liberdade, ou podem ser contínuos, possuindo um número infinito de graus de liberdade e por isso não podem ser divididos. O estudo destes sistemas é essencial em projetos de máquinas,

estruturas, motores e outros, prevenindo danos como trincas, afrouxamento, desgastes excessivos ou benefícios, tais como em ultrassons, esteiras transportadoras ou separadoras de produtos, compactadores, alívio de tensões em materiais diversos, entre outros (SOEIRO, 2008).

A vibração como fenômeno dinâmico pode ser classificada em livre ou forçada. Na vibração livre, uma vez perturbado e após cessada a perturbação, o sistema permanece vibrando naturalmente por conta própria, sem atuação de força externa, tal como ocorre no movimento de um pêndulo que oscilará livremente após ser abandonado em uma posição diferente da sua posição de equilíbrio. Diferentemente desta, a forçada ocorre quando há atuação de uma força externa, normalmente com atuação repetitiva, muito comum no desbalanceamento em sistemas rotativos, como a roda de um veículo, que quando desbalanceada, transmite uma vibração para o volante. Em relação a essa força externa, as variações dos deslocamentos, velocidades e acelerações da estrutura em função do tempo, determinam a natureza harmônica, periódica ou transiente da força (RAO, 2008).

As oscilações das vibrações livres e vibrações forçadas harmônicas estão comparativamente representadas na figura 7.

Figura 7 – Representação gráfica de vibrações livre e forçada



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Onde:

$x$  = deslocamentos em metros

$t$  = tempo em segundos

### 3.9 Frequência natural

Shigley (1969) define como frequência natural a frequência com a qual um corpo oscila por si próprio após o cessar de um distúrbio inicial, ou seja, na ausência de forças externas aplicadas.

Os diversos materiais existentes na natureza e/ou criados em laboratórios possuem frequências próprias distintas. Do ponto de vista da mecânica quântica e da termodinâmica, ao provocar um impacto em um material qualquer, os átomos se movimentam com uma energia de agitação relacionada às propriedades de cada material, tais como temperatura, elasticidade, geometria, entre outros. A combinação das frequências de todos os átomos cria um "padrão de vibração" ou frequência natural de vibração.

Conforme Silva (2009), sistemas mecânicos compostos por distintos materiais terão várias frequências naturais e, conseqüentemente, vários fatores de amortecimento, os quais serão proporcionais à quantidade de graus de liberdade, e a vibração se dará como uma combinação de todas as frequências naturais.

Estudos demonstram a necessidade de análise dinâmica no sentido de verificar a frequência natural do sistema e a frequência de operação da máquina em operação. Tal importância se verifica, por exemplo, na norma N1848, criada pela Comissão de Normatização Técnica - CONTEC da Petrobrás, a qual estabelece que as frequências natural e de operação devem ter uma defasagem mínima de 20% (PETROBRAS, 2011).

A frequência natural pode ser obtida através da equação do oscilador massa-mola, oriunda da combinação da 2ª lei de Newton (11) com a Lei de Hooke (12).

$$F_r = ma \quad (11)$$

$$F = -kx \quad (12)$$

Considerando a igualdade entre as forças cinética ( $F_r$ ) e potencial ( $F$ ), temos:

$$ma = -kx \longrightarrow a = -\frac{kx}{m} \quad (13)$$

Da substituição dos termos da equação 07 na equação 09, temos que a aceleração escalar de um corpo pode também ser dada por:

$$a = -\omega^2 x \quad (14)$$

Onde:

$a$  = Aceleração escalar

$\omega$  = velocidade angular, sendo está a grandeza angular mais importante no MHS, conhecida como frequência angular.

$x$  = deslocamento, equivalente à deformação da lei de Hooke

Substituído a aceleração da equação 13 pelos termos da equação 14, temos:

$$-\omega^2 x = -\frac{kx}{m} \quad (15)$$

Manipulando a equação 15, obtém-se a equação do oscilador massa-mola, representada pela expressão:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (16)$$

Onde:

$\omega$  = frequência natural

$k$  = rigidez da estrutura

$m$  = massa da estrutura

### 3.10 Ressonância

Quando a força responsável pela perturbação periódica externa, por exemplo uma vibração forçada, atua com frequência de excitação igual à frequência natural do corpo, ocorre o fenômeno denominado ressonância, cujo efeito será um ganho exponencial da amplitude de vibração, tornando esse fenômeno extremamente prejudicial à estrutura do corpo (QUESADA, 2019).

Assim, uma vibração, ainda que fraca, pode alcançar amplitudes cada vez maiores, de maneira exponencial até o seu colapso ou até que outra fonte externa interrompa a ressonância alterando a frequência de vibração.

Após o colapso da Ponte de Tacoma Narrows em 7 de novembro de 1940 nos Estados Unidos, os estudos acerca dos efeitos da ressonância sobre as estruturas foram largamente intensificados. A estrutura da ponte entrou em colapso após ventos fortes a atingirem em uma frequência próxima de uma de suas frequências naturais, desencadeando oscilações de grande amplitude. (BILLAH; SCANLAN, 1991, apud STRESSER, 2021).

Figura 8 – Ponte Tacoma Narrows pós colapso



Fonte: UNICAMP, s.d.

Ressonâncias em máquinas e equipamentos devem ser evitadas como forma de prevenir danos às pessoas e estruturas, cujo risco pode ser mensurado através do fator de amplificação dinâmica, representado na figura 9. Quanto maior o grau de amortecimento, menor será a amplificação da vibração. (DALBONE; SANCHES FILHO, 2011).

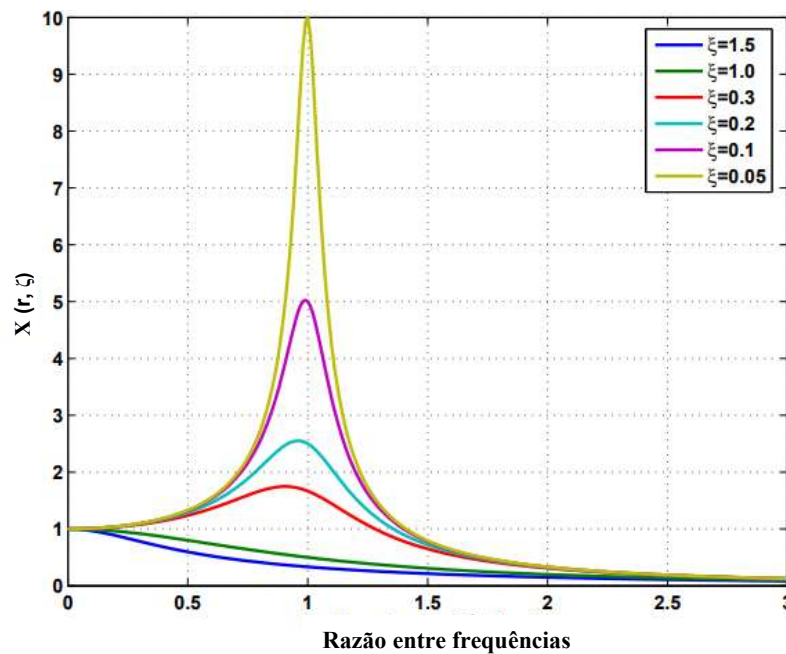
O fator de amplificação é a razão da força dinâmica decorrente da amplitude da vibração, pela força estática oriunda do deslocamento, indicando assim quantas vezes a primeira é maior que a segunda (SOEIRO, 2008).

Segundo Alves Filho (2008), “a resposta dinâmica é definida a partir do fator de amplificação dinâmica ( $r$ ), que depende da relação de frequências”, dada por:

$$r = \frac{\text{frequência de excitação}}{\text{frequência natural}} \quad (17)$$

A figura 9 mostra o fator de amplificação  $X(r, \zeta)$  para vários valores de amortecimento ( $\zeta$ ) e razão de frequências ( $r$ ) e como essas variáveis afetam as amplitudes na condição de ressonância, representada pela região onde  $r = 1$  denominada faixa de ressonância.

Figura 9 - Curvas de amplificação de amplitudes de vibração.



Fonte: Adaptado de SILVA, 2009.

Silva (2009) ressalta que na faixa de ressonância, quando o amortecimento é próximo de zero e a razão entre frequências é igual a 1, o fator de amplificação torna-se extremamente elevado. Ao valor máximo do fator de amplificação dá-se o nome de pico de ressonância.

Alves Filho (2008) nos mostra que o fator de amplificação dinâmica pode ser obtido por meio da equação 18.

$$X = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (18)$$

Onde:

$X$  = fator de amplificação dinâmica

$r$  = relação de frequências

$\zeta$  = fator de amortecimento

O fator de amortecimento consiste em um índice, conseqüentemente adimensional, resultante da relação entre a força de amortecimento e a velocidade relativa entre as partes em movimento. Esse fator pode ser representado como um percentual (0 a 100%) ou como um índice (0 a 1) e indica o quanto se deseja reduzir a vibração, sendo 0 sem nenhum tipo de amortecimento e 100%, ou 1, totalmente amortecido, ou seja, com todos os efeitos da vibração anulados.

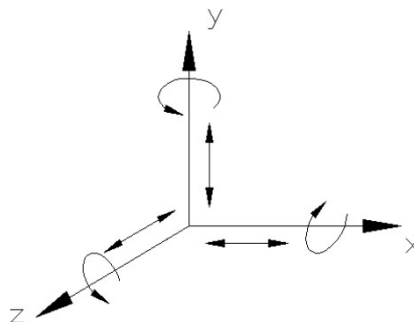
### 3.11 Graus de liberdade

Na física, os graus de liberdade, também conhecido pela expressão inglesa Degree Of Freedom – DOF, referem-se à quantidade mínima de números reais suficientes para determinar o estado físico de um sistema.

Stroski (2020) define graus de liberdade ou mobilidade como o número de variáveis que indicam a posição de um mecanismo, sendo que cada eixo das coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  apresentam um grau de liberdade de translação e um grau de liberdade de rotação. Portanto, em um espaço tridimensional um corpo terá 6 graus de liberdade.

Figura 10 - Graus de liberdade no espaço tridimensional.

Translação e rotação.



Fonte: FERNANDES, 2000.

Segundo Hibbeler (2011), graus de liberdade representa o número de movimentos independentes que um corpo rígido pode executar.

Conforme Silva (2009), a quantidade de graus de liberdade de um sistema corresponde ao número de coordenadas cinematicamente independentes necessárias para localizar e orientar o movimento espacial de uma partícula em um sistema em qualquer instante de tempo, sendo que os deslocamentos, velocidades e acelerações são descritas em função das coordenadas e suas respectivas derivadas temporais.

Segundo Rao (2008), toda análise dinâmica se baseia no mais simples sistema oscilatório, o sistema massa-mola definido pela Lei de Hooke, independente da complexidade da análise, as vibrações livres com vários graus de liberdade podem ser solucionadas com a superposição de sistemas harmônicos elementares.

Soeiro (2008) ratifica que sistemas com vários graus de liberdade podem ser equacionados em sistemas de um grau de liberdade, com posterior extensão dos conceitos para problemas de maior grau, solucionando assim problemas como ressonância, transmissibilidade, balanceamento e isolamento.

### 3.12 Equação do movimento com um grau de liberdade

Segundo Alves Filho (2008), a formulação das equações do movimento de um sistema dinâmico é a tarefa mais importante do processo de análise, podendo ser obtida a partir da aplicação da 2ª Lei de Newton, também conhecida como princípio fundamental da dinâmica, onde uma força resultante corresponde ao produto da massa pela aceleração. De igual forma, a resultante de todas as forças que atuam sobre um ponto material num dado instante produz uma aceleração na mesma direção e no mesmo sentido da força resultante, cujas variáveis são relacionadas com a massa, conforme a equação 19.

$$\vec{R} = m \cdot a \tag{19}$$

Onde:

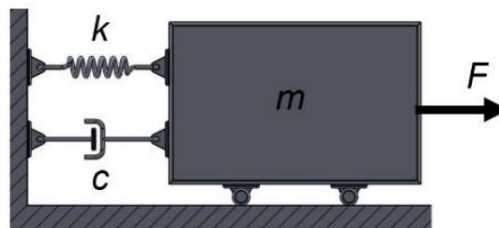
$\vec{R}$  = Resultante de todas as forças

$a$  = Aceleração

$m$  = massa

Por intermédio do Diagrama de Corpo livre, podemos analisar também o comportamento dinâmico, analisando a resultante das forças atuantes sobre o corpo, tendo como base um sistema amortecido com um grau de liberdade, conforme demonstrado a seguir pelo sistema de um grau de liberdade com massa ( $m$ ), mola ( $k$ ), amortecedor ( $C$ ) e força externa ( $F$ ).

Figura 11 - Sistema vibracional amortecido



Fonte: QUESADA, 2019.

Considerando as forças atuantes sobre a massa na direção horizontal e aplicando a 2ª Lei de Newton, temos:

$$F(t) = F_{elástica} + F_{amortecimento} + F_{inércia} \quad (20)$$

onde:

- $F(t)$  = Força externa aplicada sobre o corpo variando em função do tempo;
- $F_{elástica}$  = Força elástica aplicada sobre o corpo, dada pela lei de Hooke;
- $F_{amortecimento}$  = Força de amortecimento que o amortecedor ( $c$ ) aplica sobre o corpo;
- $F_{inércia}$  = Força de inércia, dada pela segunda lei de Newton.

A força elástica é proporcional à deformação da mola ( $k.x$ ), o módulo da força de amortecimento é proporcional à velocidade ( $c.v$ ), onde “ $c$ ” representa a constante de amortecimento e “ $v$ ” a velocidade, e a força de inércia é proporcional à massa e à aceleração ( $m.a$ ).

Alves Filho (2008) ressalta que do estudo da Cinemática e da Dinâmica, a primeira derivada da coordenada ( $u$ ) que define a posição de uma partícula nos fornece a velocidade dessa partícula, e que a segunda derivada nos fornece a aceleração da partícula, ambas em relação ao tempo. Diante do exposto, temos:

$u$  - Deslocamento do corpo que define sua posição no espaço;

$\dot{u}$  - Primeira derivada do espaço em relação ao tempo, ou seja, velocidade ( $v$ ) do corpo, dada por:

$$v = \dot{u} = \frac{du}{dt} \quad (21)$$

$\ddot{u}$  - Segunda derivada do espaço em relação ao tempo, ou seja, a aceleração ( $a$ ) do corpo, dada por:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} = \ddot{u} \quad (22)$$

Substituindo os termos das equações (21) e (22) na equação (20) temos:

$$F(t) = k.u + c.\dot{u} + m.\ddot{u} \quad (23)$$

Brasil (2013) define a equação (23) como ponto de partida para o estudo do comportamento dinâmico com um grau de liberdade da estrutura, pois contabiliza todas as forças que agem no corpo. A partir da equação do movimento com um grau de liberdade é possível analisar dinamicamente estruturas discretizadas com  $n$  graus de liberdade utilizando o Método de Superposição Modal, através do qual aplica-se a 2ª Lei de Newton para descrever cada uma das massas discretizadas em cada um dos graus de liberdade, obtendo-se um sistema de equações simultâneas, não sendo, no entanto, o objetivo do presente trabalho.

Considerando que a força externa  $F(t)$  em questão pode ter sua origem em uma vibração forçada, sob ação de cargas que variam senoidalmente com o tempo denominada força de excitação senoidal dada pela equação (10), teremos:

$$F_0 \cdot \text{sen.}(\omega t) = k.u + c.\dot{u} + m.\ddot{u} \quad (24)$$

Onde:

$F_0$  = força de excitação ou força equivalente

$\text{sen.}(\omega t)$  = frequência de oscilação imposta pela força

$k \cdot u$  = força potencial elástica (Lei de Hooke)

$c \cdot \dot{u}$  = força de amortecimento

$m \cdot \ddot{u}$  = força cinética (Segunda Lei de Newton)

A equação (24) se mostra como solução para sistemas com vibrações forçadas com amortecimento. Porém há variadas formas e modos de vibrações que podem agir sobre um sistema. Para cada fonte particular de vibração forçada haverá um modo particular de resposta à excitação. As máquinas rotativas que apresentam desbalanceamentos, por exemplo, dão origem a um dos problemas mais importantes, pois partes desbalanceadas de um motor geram forças periódicas cuja frequência de excitação jamais podem se igualar à frequência natural da estrutura. Para esse problema em particular faz-se necessário também uma solução particular (ALVES FILHO, 2008).

Para que possamos aplicar a segunda Lei de Newton de forma dinâmica em um sistema rotativo desbalanceado é necessário aplicar a aceleração sobre as massas que giram e as massas que não giram no sistema de maneira individualizada, sendo as forças de inércia consideradas em relação ao referencial fixo. A posição da massa que gira ( $m$ ) é dada por:

$$u_m = u + e \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (25)$$

Onde:

$u_m$  = posição da massa que gira

$u$  = posição da massa que não gira

$e$  = excentricidade da massa desbalanceada

$\omega$  = frequência de excitação

A posição da massa que não gira ( $M - m$ ) é dada apenas por  $u$ . Portanto, aplicando a aceleração sobre a massa temos:

$$m \cdot \ddot{u} = (M - m) \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + m \cdot \frac{d^2(u + e \cdot \sin(\omega t))}{dt^2} \quad (26)$$

Calculando as derivadas, temos o princípio fundamental da dinâmica dado por:

$$m \cdot \ddot{u} = M \cdot \frac{d^2u}{dt^2} - m \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + m \cdot \frac{d^2u}{dt^2} - m \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \quad (27)$$

Simplificando temos:

$$m \cdot \ddot{u} = M \cdot \frac{d^2u}{dt^2} - m \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \quad (28)$$

Considerando a aceleração sobre a massa de maneira dinâmica, obtemos a Equação do Movimento com um grau de liberdade, a qual representa a ação de toda as forças atuantes no corpo:

$$-k \cdot u - c \cdot \dot{u} = M \cdot \frac{d^2u}{dt^2} - m \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \quad (29)$$

Derivando e reagrupando a equação 29 chegamos a seguinte expressão:

$$k \cdot u + c \cdot \dot{u} + M \cdot \ddot{u} = m \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \quad (30)$$

Onde:

$k$  = constante elástica do material

$u$  = deslocamento do corpo

$c$  = constante de amortecimento

$\dot{u}$  = velocidade do corpo

$M$  = massa do corpo

$\ddot{u}$  = aceleração do corpo

$m$  = massa desbalanceada

$e$  = *excentricidade* da massa desbalanceada

$\omega$  = frequência de excitação

$t$  = tempo

Relacionando as equações (24) e (30), vemos que neste caso particular a força de excitação ( $F_0$ ) tem sua origem no desbalanceamento, mantendo o modo de vibração. Dessa correlação entre as equações temos a força de excitação ou força equivalente dada por:

$$F_0 = m \cdot e \cdot \omega^2 \quad (31)$$

A solução da equação 30, combinada com a equação 31, é dada por:

$$u(t) = \frac{F_0}{k} X \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \Phi) \quad (32)$$

Onde:

$X$  - fator de amplificação

$\Phi$  - fase da vibração forçada

Obtemos a fase da vibração forçada partindo da solução particular apresentada na equação (31) e substituindo-a na equação geral (30). Da resolução dessa nova equação e das relações dos fatores de amortecimento ( $\zeta$ ) e relações de frequências ( $r$ ), obtém-se que:

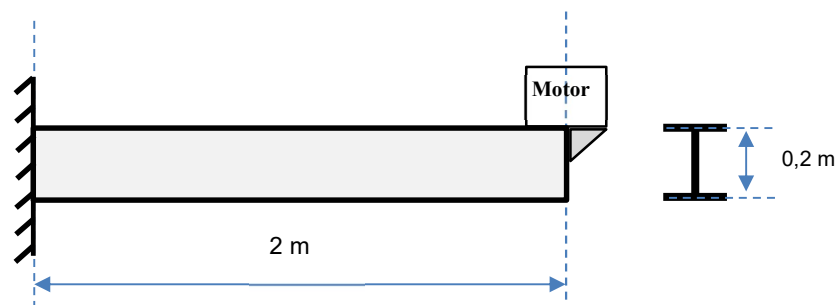
$$\Phi = \text{arctg} \frac{2 \cdot \zeta \cdot r}{1 - r^2} \quad (33)$$

#### 4. Aplicação

A presente aplicação hipotética tem por objetivo correlacionar e consolidar os conceitos apresentados na revisão bibliográfica, através da determinação da tensão normal máxima na extremidade engastada e dos deslocamentos verticais mínimos e máximos do ponto externo de uma viga submetida a um carregamento periódico decorrente de uma vibração forçada.

A figura 11 apresenta uma viga de aço em balanço, onde centralizado na extremidade oposta ao engaste, de forma que todo o peso se encontra concentrado nessa extremidade, situa-se um motor em funcionamento e cujo desbalanceamento rotativo gera uma excitação senoidal no plano vertical (ALVES FILHO, 2008).

Figura 12 - Viga em balanço



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Considerando que a viga possui apenas um grau de liberdade, sendo este na vertical, e que sua massa é desprezível em relação ao carregamento representado pelo motor no ponto considerado, uma vez que possui peso de referência aproximado de 76 kg (MAXXI CORPORATION, 2022), a estrutura possui os seguintes dados apresentados na tabela 01.

Tabela 1 - Dados do Carregamento

E aço	módulo de Elasticidade do aço	20 E+10 N/m <sup>2</sup>
I	momento de inércia da viga em relação à linha neutra para flexão no plano vertical	4,67 E-05 m <sup>4</sup>
M	massa do motor	1200 kg
m	massa desbalanceada	60 kg
g	aceleração da gravidade	9,8 m/s <sup>2</sup>
e	excentricidade da massa desbalanceada	0,2 m
ζ	fator de amortecimento	5 %
L	comprimento da viga	2 m
∅	espessura da viga	0,2 m
n	Rotação do motor	360 Rpm
f	Frequência do motor = 360/60rps	6,00 Hz

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Ressalta-se que os dados relativos ao aço estão em conformidade com o item 4.5.2.9 da NBR 8800:2008, o qual especifica as propriedades mecânicas para projetos de estruturas de aço.

Como dito anteriormente, uma vez que a massa do motor é muito maior que a massa da viga, o comportamento na extremidade da estrutura pode ser analisado dinamicamente utilizando-se o sistema massa mola, com amortecimento e força externa.

Considerando o deslocamento apenas na vertical, temos um sistema com um grau de liberdade com vibração forçada amortecida, inércia decorrente da massa do motor e força senoidal gerada pelo desbalanceamento do motor rotativo.

Para cálculo e análise do comportamento dinâmico da estrutura, faz necessários as aplicações dos conceitos e fórmulas a seguir.

#### a. Constante do sistema corpo-mola da viga

Do estudo da mecânica dos sólidos sabemos que a aplicação de uma carga estática vertical na extremidade de uma viga engastada, com seção transversal uniforme, provoca deformações elásticas (flechas), dada por (USP, 2010):

$$\delta = \frac{P.L^3}{3.E.I} \quad (34)$$

Onde:

$\delta$  - deflexão vertical

$P$  – peso

$L$  - comprimento da viga

$E$  - módulo de Elasticidade do material

$I$  - momento de inércia da seção transversal

Considerando que a força neste caso específico advém do peso e aplicando-se a lei de Hooke, uma vez que estamos falando de deformação elástica, podemos substituir  $P$  por  $kx$ , obtendo:

$$\delta = \frac{k.x.L^3}{3.E.I} \quad (35)$$

Reorganizando os termos de forma a isolar a constante elástica  $k$  e considerando que  $\delta = x$ , uma vez que ambos são deslocamentos, a constante do sistema corpo-mola da viga ( $k$ ) é dada por:

$$k = \frac{3.E.I}{L^3} = 35,03 \text{ E}+5 \text{ N/m} \quad (36)$$

b. Frequência natural do sistema

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = 54,03 \text{ rad/s} \quad (37)$$

c. Frequência de vibração do motor

$$\omega = 2.\pi.f = 37,70 \text{ rad/s} \quad (38)$$

d. Relação entre as frequências

$$r = \frac{\text{frequência de excitação}}{\text{frequência natural}} = \frac{\omega}{\omega_n} = 0,698 \quad (39)$$

e. Força de excitação senoidal devido ao desbalanceamento

$$F_{\text{excitação}} = m \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) = 17055,48 \text{ sen}37,7.t \quad (\text{SI}) \quad (40)$$

f. Fator de amplificação dinâmica

Conforme os dados de carregamento, pré-estabelecidos na tabela 1, o fator de amortecimento é de 5%.

$$\mathcal{X} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot r)^2}} = 1,93 \quad (41)$$

g. Equação do movimento com um grau de liberdade

Da equação 32, a vibração permanente ou estacionária é dada por:

$$u(t) = \frac{F_0}{k} \cdot \mathcal{X} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \Phi) = 9,40 \text{ E-}03 \text{ sen}(37,7.t - \Phi) \quad (\text{SI}) \quad (42)$$

$$\Phi = \text{arctg} \frac{(2 \cdot \zeta \cdot r)}{1-r^2} = 0,13529 \text{ rad} \quad (43)$$

h. Vibração permanente ou estacionária

Conforme dados da tabela 1, para  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , temos:

$$P = M \cdot g = 11760 \text{ N} \quad (44)$$

A equação 34 permite-nos calcular a deflexão vertical, ou seja, o deslocamento causado pelo peso próprio do motor, dado por:

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} = 3,36 \text{ E-03 m} \quad (45)$$

i. Equação do movimento – deslocamento total

$$u(t) = 0,003358 + 0,009398 \cdot \text{sen}(37,7 \cdot t - 0,13529) \quad (46)$$

j. Deslocamentos

Os deslocamentos máximos e mínimos são determinados pela função senoidal, com seno variando de +1 a -1. O deslocamento será máximo vertical para baixo em  $t = 0,045254$  s, sendo máximo vertical para cima em  $t = 0,128586$  s.

$$\begin{aligned} u_{\text{máx.}}(0,045254) &= 0,003358 + 0,009398 = 12,76 \text{ E-03 m} \\ u_{\text{mín.}}(0,128586) &= 0,003358 - 0,009398 = -6,04 \text{ E-03 m} \end{aligned} \quad (47)$$

k. Tensão constante

$$\sigma_{\text{estática}} = \frac{M \cdot g \cdot L}{I} \cdot \frac{\phi}{2} = \begin{matrix} 50,4 \text{ E+6 N/m}^2 \\ 5,14 \text{ kgf/mm}^2 \end{matrix} \quad (48)$$

l. Tensão Variável

$$\sigma_{\text{dinâmica}} = \frac{F_{\text{excitação}} \cdot L}{I} \cdot \frac{\phi}{2} \cdot M = \begin{matrix} 141,0 \text{ E+6 N/m}^2 \\ 14,38 \text{ kgf/mm}^2 \end{matrix} \quad (49)$$

m. Variação da tensão de tração e compressão

$$\sigma_{\text{máxima}} = \sigma_{\text{estática}} + \sigma_{\text{dinâmica}} = \begin{matrix} 191,3 \text{ E+6 N/m}^2 \\ 19,52 \text{ kgf/mm}^2 \end{matrix} \quad (50)$$

$$\sigma_{\text{mínima}} = \sigma_{\text{estática}} - \sigma_{\text{dinâmica}} = \begin{matrix} -90,6 \text{ E+6 N/m}^2 \\ -9,25 \text{ kgf/mm}^2 \end{matrix} \quad (51)$$

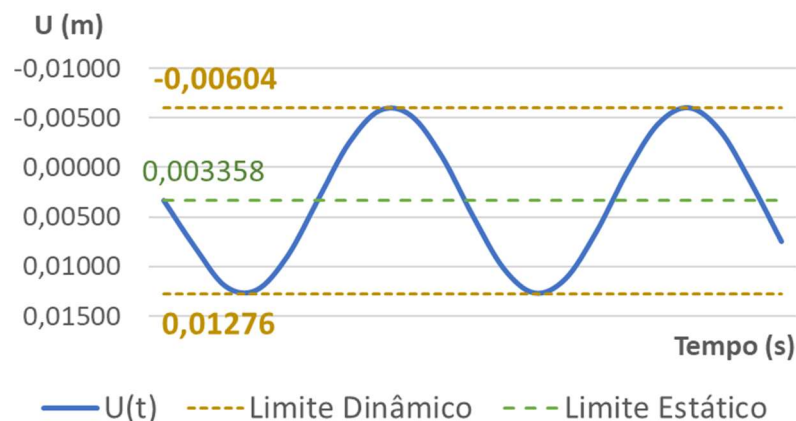
## 5. Resultados

Na estrutura analisada a força dinâmica é oriunda da excitação, a qual será superposta à força estática, representada pela força peso do motor sobre a viga.

Em termos de deslocamentos verticais e tensões, a ação da força peso age de maneira estática sobre a estrutura, enquanto a força de excitação senoidal age de maneira variável com o tempo, gerando ora tensões de tração, ora de compressão.

Em decorrência do carregamento dinâmico, os deslocamentos totais (somados os deslocamentos causados pelo carregamento estático) variam de maneira senoidal, assim como as tensões totais, ambos apresentados na figura 13 e 14.

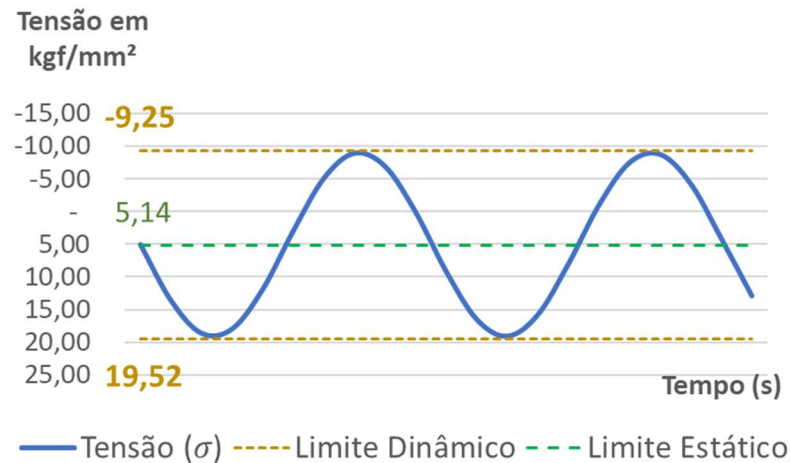
Figura 13 - Deslocamentos em função do tempo



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A tensão constante sobre a viga será de  $50,4 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ , equivalente a  $5,14 \text{ kgf/mm}^2$ , enquanto a tensão variável (dinâmica) será de  $141,0 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  ou  $14,38 \text{ kgf/mm}^2$ . Combinadas as tensões, teremos valor máximo positivo (para baixo) de  $19,52 \text{ kgf/mm}^2$  ( $\sigma_{estática} + \sigma_{dinâmica}$ ) e valor máximo negativo (para cima) de  $-9,25 \text{ kgf/mm}^2$  ( $\sigma_{estática} - \sigma_{dinâmica}$ ), uma vez que em função do tempo o sentido da força dinâmica se inverte. A tensão máxima para cima se deve ao fato de que a tensão variável é maior que a tensão constante. Tal comportamento pode ser observado na figura 14.

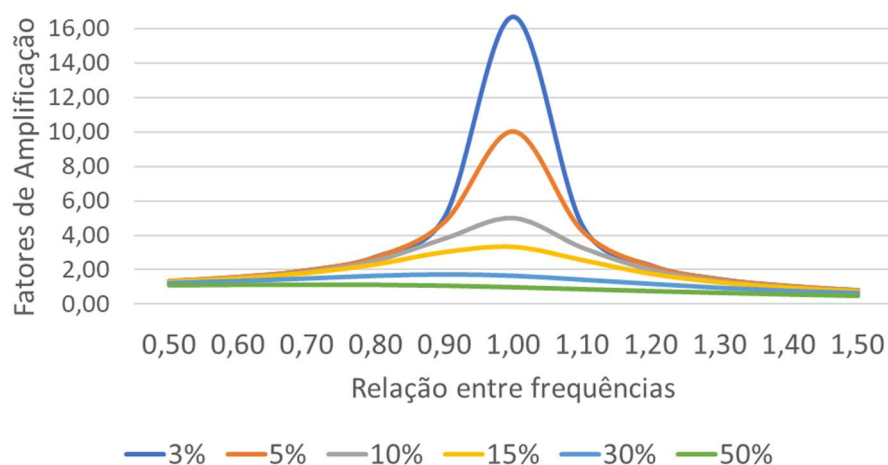
Figura 14 - Tensão em função do tempo



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A relação entre as frequências de excitação e frequência natural foi de 0,698. Considerando os danos que uma ressonância pode causar a um sistema, essa relação é de suma importância e deve ser diferente de 1,000. Para efeitos exemplificativos, a figura 15 apresenta o comportamento da estrutura analisada com diferentes fatores de amplificação e diferentes relações de frequências, cujos dados são apresentados na tabela 2. Nota-se que o fator de amplificação se torna extremamente alto na região em torno da relação de frequência igual a um.

Figura 15 - Gráfico de Amplificação Dinâmica



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

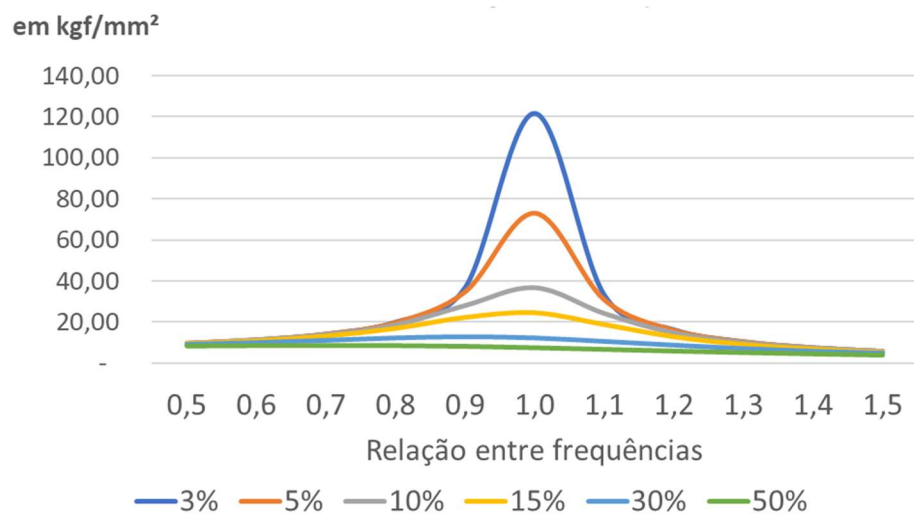
Tabela 2 - Fatores de amplificação

Relações de Frequências	Amortecimento					
	3%	5%	10%	15%	30%	50%
0,50	1,33	1,33	1,32	1,31	1,24	1,11
0,60	1,56	1,56	1,54	1,50	1,36	1,14
0,70	1,95	1,94	1,89	1,81	1,51	1,15
0,80	2,75	2,71	2,54	2,31	1,67	1,14
0,90	5,06	4,76	3,82	3,03	1,75	1,09
1,00	16,67	10,00	5,00	3,33	1,67	1,00
1,10	4,54	4,22	3,29	2,56	1,44	0,89
1,20	2,24	2,19	2,00	1,76	1,19	0,78
1,30	1,44	1,42	1,36	1,26	0,96	0,68
1,40	1,04	1,03	1,00	0,95	0,78	0,59
1,50	0,80	0,79	0,78	0,75	0,65	0,51

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

De igual maneira, as tensões na região de ressonância, ou seja, com relações de frequência iguais ou muito próximas a 1 se torna exorbitantemente altas se comparadas à outras faixas de frequências, conforme demonstrado na figura 16 e tabela 3.

Figura 16 - Tensão dinâmica x relação de frequências



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Tabela 3 - Tensão dinâmica em kgf/mm<sup>2</sup>

Relações de Frequências	Amortecimento					
	3%	5%	10%	15%	30%	50%
0,50	9,91	9,91	9,84	9,76	9,24	8,27
0,60	11,63	11,63	11,48	11,18	10,14	8,50
0,70	14,53	14,46	14,09	13,49	11,25	8,57
0,80	20,50	20,20	18,93	17,22	12,45	8,50
0,90	37,71	35,48	28,47	22,58	13,04	8,12
1,00	124,25	74,53	37,27	24,82	12,45	7,45
1,10	33,84	31,45	24,52	19,08	10,73	6,63
1,20	16,70	16,32	14,91	13,12	8,87	5,81
1,30	10,73	10,58	10,14	9,39	7,16	5,07
1,40	7,75	7,68	7,45	7,08	5,81	4,40
1,50	5,96	5,89	5,81	5,59	4,84	3,80

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Nas figuras 15 e 16 podemos notar também o quanto o aumento no amortecimento da estrutura reduz a incidência de ressonâncias em relações de frequências próximas a 1. Nos dados aqui apresentados, o amortecimento de apenas 3% se mostrou viável porque a relação entre frequências demonstrada na equação 39 ficou distante de 1.

## 6. Conclusão

A presente revisão bibliográfica propiciou apurar as principais diferenças entre os tipos de carregamentos estáticos e dinâmicos e respectivas correlações, através da compreensão dos princípios fundamentais da dinâmica, permitindo uma análise mais ampla do dimensionamento das estruturas.

A estrutura, quando analisada de maneira estática, apresentou uma tensão constante de 5,14 kgf/mm<sup>2</sup>. Esse cenário será verdadeiro apenas enquanto o motor estiver desligado, ocasião em que a única carga atuante será a força peso. Uma vez ligado o motor, a atuação da força de excitação senoidal gerada pela vibração da carga desbalanceada gerou adicionalmente uma tensão máxima de 14,38 kgf/mm<sup>2</sup>.

O comportamento dinâmico da estrutura apresentou variações de tensão e deslocamentos em função do tempo, as quais não são identificáveis quando da análise puramente estática.

Ademais, o presente estudo demonstrou ainda a importância e os efeitos da vibração e da ressonância. O comportamento da estrutura próximo às relações de frequência igual a 1 apresentou elevados valores de tensão, situação essa que coloca a estrutura em risco e que também não é identificável na análise convencional de carregamentos estáticos multiplicados por fatores de amplificação dinâmica, como margem de segurança para suprir os efeitos ressonantes.

A revisão bibliográfica oportunizou não apenas a análise detalhada de diversos conceitos, mas também a forma como diversos estudiosos enxergam e expressam seus entendimentos acerca do assunto.

Por questões didáticas e com o objetivo de adequação do tema ao ensino, o presente trabalho abordou a análise da estrutura considerando apenas um grau de liberdade, sem quaisquer intensões de esgotamento do assunto. Portanto, o estudo de estruturas com vários graus de liberdade, bem como correlações entre a capacidade da estrutura e o pico de tensão com frequências ressonantes deverão ser objeto de trabalhos futuros.

## 7. Referências bibliográficas

ALEANDRI, G. A.; LIMBERGER, A.E.; BERTUZZO, T. A., DALPOSSO, G. H.; FAKHYE, R. J. M. Solução da equação característica na análise dinâmica de um pórtico plano utilizando o método de Newton-Raphson. REEC – Revista Eletrônica de Engenharia Civil, v.6, nº1. 2013.

ANDRADE, V. S. Análise dinâmica de uma viga engastada excitada por uma fonte não ideal. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2009.

ALVES FILHO, A. Elementos finitos: a base da tecnologia CAE / análise dinâmica. 2ª. Ed. São Paulo: Érica, 2008.

ALVES, J. A.; GALVÃO, A. M. M. T.; ALMEIDA NETO, J. A.; ZAMBELLI, R. A. Aplicação da lei de Hooke no estudo da deformação de corpos sólidos. XXVI Encontro de Iniciação à Docência. Universidade Federal de Fortaleza. Fortaleza, 2017.

BATELO, E. A. P. Análise dinâmica avançada de estruturas de aço sob cargas extremas. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2014.

BEER, F. P.; JOHNSTON Jr., E. R.; DEWOLF, J. T. Resistência dos materiais: mecânica dos materiais. 4. ed. Rio de Janeiro: McGraw-Hill Interamericana do Brasil, 2010.

BRASIL, R. M. L. R. F.; SILVA, M.A. Introdução à dinâmica das estruturas para a engenharia civil. São Paulo Blucher, 2013.

CARBONARI, G. Análise dinâmica de vigas de eixo curso e seção aberta submetidas a cargas móveis. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Londrina, 1989.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. Dynamics of Structures. 3ª. ed. University Avenue Berkeley, California 94704 - USA.: Computers and Structures, Inc., 1995.

DALBONE, A. R.; SANCHES FILHO, E. S. Análise dinâmica de fundações diretas para máquinas rotativas. Engenharia Estudo e Pesquisa. v. 11 - n. 2 - p. 36-46. Niterói, 2011.

FERNANDES, J. P. F. Análise cinemática e dinâmica de mecanismos com recurso a meios computacionais. Universidade do Minho. Guimarães - Portugal, 2000.

FERREIRA, J. C.; CHIARELLO, M. G. Aplicação embarcada para análise de vibrações mecânicas utilizando a transformada rápida de Hartley. Revista Tecnológica e Científica Design & Tecnologia. Vol. III, nº 2. ago./dez. 2016. Universidade de Franca. Franca - SP, 2016.

FERRO, R. M.; FERREIRA, W.G.; CALENZANI, A. F. G. Estado da arte: análise dinâmica de estruturas de aço suportes de máquinas rotativas. XI Simpósio de Mecânica Computacional. II Encontro Mineiro de Modelagem Computacional. Juiz de Fora, 2014.

FERRO, R.M. Análise dinâmica de estruturas de aço suportes de máquinas rotativas. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2014.

HIBBELER, R. C. Dinâmica: mecânica para engenharia. Tradução Jorge Ritter; revisão técnica José Maria Campos dos Santos. 12<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Person Prentice Hall, 2011.

HIBBELER, R. C. Estática: mecânica para engenharia. Tradução Daniel Vieira; revisão técnica José Maria Campos dos Santos. 12<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Person Prentice Hall, 2011.

KNIGHT, R.D. Física. Uma abordagem estratégica. Volume 1. 2<sup>a</sup> ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.

MAXXI CORPORATION. Produtos Viga I - Abas Inclinadas. Disponível em: [http://maxxico.com.br/viga\\_i.php](http://maxxico.com.br/viga_i.php). Acesso em 20 de julho de 2022.

MENDONÇA, P. T. R. Análise dinâmica pelo Método de Elementos Finitos. Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC. Florianópolis, 2006.

NBR 8800:2008. Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Campos Elísios: 2008. Disponível em: [https://engcivil20142.files.wordpress.com/2018/03/nbr8800\\_2008\\_1.pdf](https://engcivil20142.files.wordpress.com/2018/03/nbr8800_2008_1.pdf). Acesso: em 25 de abril de 2022.

PETROBRAS – PETRÓLEO BRASILEIRO S.A. – N-1848 – REV. C – Projeto de Fundações de Máquinas. Rio de Janeiro, 2011. Disponível em <https://canalfornecedor.petrobras.com.br/pt/regras-de-contratacao/catalogo-de-padronizacao/#especificacoes-tecnicas>. Acesso em 24 de maio de 2022.

QUESADA, R. C. Controle de vibrações. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2019.

RAO, S. Vibrações mecânicas. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

RIMOLA, B. D. Análise dinâmica de plataformas de aço para produção de petróleo com base na consideração do efeito da interação solo-estrutura. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2010.

SALES, G. L. Física básica I. Coordenação Cassandra Ribeiro Joye. Fortaleza: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE. Universidade Aberta do Brasil – UAB, 2011.

SHIGLEY, J. E. Dinâmica das máquinas; trad. Mauro Ormeu C. Amorelli. - São Paulo: Edgard Blücher, 1969.

SILVA, S. Vibrações mecânicas. Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. Foz do Iguaçu, 2009.

SILVA JR., P. A. Fonte senoidal. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina - Campus São José. Disponível em: <https://wiki.sj.ifsc.edu.br>

/wiki/images/0/0e/ELI\_ApostilaCA.pdf. Acesso em 13 de junho de 2022.

SOEIRO, N. S. Curso de fundamentos de vibrações e balanceamento de rotores. Universidade Federal do Pará – Instituto de Tecnologia – ITEC. Belém, 2008.

STRESSER, J. F. Estudo do controle de vibração de uma viga engastada por meio de absorvedores dinâmicos de vibração. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2021.

STROSKI, P. N. O que são graus de liberdade? Electrical e-Library. 2020. Disponível em: <https://www.electricalibrary.com/2020/03/18/o-que-sao-graus-de-liberdade/>. Acesso em: 07 de abril de 2022.

UNICAMP. A Ponte de Tacoma Narrows - Ressonância e Autovetores. S.d. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/ponte-de-tacoma/>. Acesso em 20 de julho de 2020.

USP. Tabelas de vigas: Deslocamentos e Momentos de Engastamento Perfeito. São Carlos, 2010. Disponível em: <http://web.set.eesc.usp.br/mdidatico/concreto/Textos/22%20Tabelas%20de%20vigas.pdf>. Acesso em 20 de julho de 2020.